Curso Breve de Geometría Analítica

N. EFIMOV



EDITORIAL

MIR

Н. ЕФИМОВ

КРАТКИЙ КУРС АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Издание
7

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА

На испанском языке

N. EFIMOV
Profesor

CURSO BREVE de GEOMETRIA ANALITICA

TRADUCCION DEL RUSO POR

EMILIANO APARICIO BERNARDO,

Candidato a Doctor en Ciencias Físico—Matemáticas,
Catedrático de Matemáticas Superiores

(Segunda edición)

EDITORIAL MIR
MOSCU
1969

CDU 513/516

Traducción de la 7ª
edición rusa

INDICE

Primera parte

GEOMETRIA ANALITICA PLANA

Segunda parte

GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO

I

Parte

GEOMETRIA ANALITICA PLANA

1.

COORDENADAS EN LA RECTA Y EN EL PLANO

§ 1. Eje y segmentos del eje

1. Consideremos una recta arbitraria, con dos direcciones opuestas entre sí. Elijamos una de ellas como preferida y llamémosla positiva (a la dirección opuesta la llamaremos negativa).

La recta, en la que se ha «elegido» una dirección positiva, la llamaremos *eje*. La dirección positiva del eje se indica en las figuras con una flecha (véase, por ejemplo, la fig. 1, en la que está representado el eje *a*).



Fig. 1.

2. Supongamos dado un eje cualquiera, habiéndose tomado un *segmento unidad*, es decir, una unidad lineal con la cual se puede medir cualquier segmento y, por lo tanto, se puede definir la longitud de un segmento arbitrario.

Tomemos dos puntos arbitrarios en el eje dado y indiquémoslos con las letras *A* y *B*. *El segmento limitado por los puntos A y B se llama dirigido, si se ha convenido cuál de estos puntos se toma como origen y cuál como extremo del segmento. Como dirección del segmento se toma la dirección del origen al extremo.*

A continuación, el segmento dirigido se designará en el texto con dos letras y una rayita sobre ellas; se usarán precisamente las mismas letras que indican los puntos que limitan el mismo. En primer lugar se coloca la letra que determina el origen. Así pues, $\overline{AB}$ denota el segmento dirigido limitado por los puntos *A* y *B*, cuyo

origen está en el punto A; $\overline{BA}$ denota el segmento dirigido limitado por los puntos A y B, cuyo origen está en el punto B.

Considerando a continuación segmentos dirigidos en un eje, los llamaremos simplemente segmentos, omitiendo la palabra «dirigido».

Convengamos en llamar magnitud del segmento del eje $\overline{AB}$ al número igual a su longitud, tomado con signo más, si la dirección del segmento coincide con el sentido positivo del eje, y con signo menos, si la dirección coincide con el sentido negativo del mismo. La magnitud del segmento $\overline{AB}$ la indicaremos con la notación AB (sin rayita). No excluimos el caso en que los puntos A y B coincidan; entonces se dice que el segmento $\overline{AB}$ es *nulo*, ya que su magnitud AB es igual a cero. La dirección del segmento nulo es indeterminada y, por lo tanto, llamar a tal segmento dirigido, se puede sólo condicionalmente.

La magnitud del segmento, a diferencia de su longitud, es un número *relativo*; es obvio que la longitud del segmento es igual al módulo de su magnitud*) y, por eso, de acuerdo con el método establecido en el álgebra para la denotación del módulo de un número para indicar la longitud del segmento $\overline{AB}$, emplearemos la notación $|AB|$. Es evidente que $|AB|$ y $|BA|$ indican un mismo número. En cambio, las magnitudes AB y BA se diferencian de signo, es decir:

$$AB = -BA.$$

En la fig. 1 está representado el eje a y en él los puntos A, B, C, D; el segmento unidad es E_1E_2. Se supone que los puntos A, B, C y D están situados de tal modo, que la distancia entre A y B es igual a dos, y entre C y D es igual a tres. La dirección de A a B coincide con el sentido positivo del eje, la dirección de C a D es opuesta al sentido positivo del eje. Por lo tanto, tendremos en este caso:

$$AB = 2, \quad CD = -3,$$

o sea

$$BA = -2, \quad DC = 3.$$

Además, se puede escribir

$$|AB| = 2, \quad |CD| = 3.$$

3. *Cualquiera que sea la posición de los puntos A, B y C en el eje, las magnitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ están sujetas a la relación*

$$AB + BC = AC; \quad (1)$$

a esta relación la llamaremos *identidad fundamental*.

*) La palabra «módulo» tiene igual significado que «valor absoluto».

Demostremos la identidad fundamental. Supongamos, en primer término, que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, no siendo nulos, tienen la misma dirección (fig. 2, arriba); entonces, el segmento $\overline{AC}$ tiene la longitud igual a la suma de las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

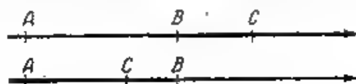


Fig. 2.

e igual dirección que los mismos. En este caso, los tres números AB, BC y AC son de igual signo, y el valor de AC es igual a la suma de los números AB y BC, es decir, se verifica la identidad (1).

Supongamos ahora que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, no siendo nulos, tienen direcciones opuestas (fig. 2, abajo). Entonces, el segmento $\overline{AC}$ tiene una longitud igual a la diferencia de las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y su dirección coincide con la del más largo de ellos. En este caso los valores numéricos de AB y BC son de signo contrario y el módulo de AC es igual a la diferencia de los módulos de AB y BC, mientras que el signo de AC coincide con el de aquel número, cuyo módulo es mayor. Por consiguiente, según la regla de la adición de los números relativos, para tal posición de los puntos, tendremos que el número AC será igual a la suma de los números AB y BC, con lo que se verifica la identidad (1).

Supongamos, por último, que uno de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ es nulo. Si $\overline{AB}$ es un segmento nulo, el punto B coincide con el punto A y, por lo tanto,

$$AB+BC=AA+AC=0+AC=AC.$$

Si el segmento nulo es $\overline{BC}$, el punto B coincide con el punto C y, por consiguiente,

$$AB+BC=AC+CC=AC+0=AC.$$

O sea, que la identidad (1) se verifica en realidad para cualquier posición de los puntos A, B y C.

Nota. Si en la relación (1) las notaciones AB, BC y AC se considerasen simplemente como longitudes de los segmentos correspondientes (sin tener en cuenta los signos), entonces ésta sería válida solamente si el punto B estuviese situado entre los puntos A y C. El origen de la universalidad de la relación (1) consiste, precisa-

mente, en que por AB, BC y AC se entienden las **magnitudes** de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, es decir, las longitudes tomadas con sus signos correspondientes *).

§ 2. Coordenadas en la recta. Eje numérico

4. Seguidamente indicaremos un método que permite determinar, mediante **números**, la **posición de los puntos** en una recta dada arbitrariamente.

Sea dada una recta arbitraria a. Tomemos un segmento cualquiera como unidad lineal; indiquemos la dirección positiva en la recta a (después de lo cual, ésta se convierte en eje) y designemos con la letra O un punto de la misma.

Convengamos ahora *en llamar coordenada de un punto cualquiera M del eje a a la magnitud del segmento $\overline{OM}$. Al punto O lo llamaremos origen de coordenadas; su propia coordenada es igual a cero.*

La coordenada del punto M determina por completo la posición del mismo en la recta dada. Más preciso, el módulo de la coordenada, o sea, OM, representa la distancia del punto M al punto O (previamente fijado) y el signo de la coordenada, es decir, el signo del número OM, determina hacia qué parte del punto O está situado el punto M; si la coordenada es positiva, el punto M está situado en la dirección positiva respecto de O; si es negativa, M estará situado en la dirección negativa; si la coordenada es igual a cero, M coincide con O (todo esto se deduce directamente de la definición de la magnitud del segmento del eje; véase el n° 2).

Supongamos que la posición de la recta a es horizontal y su dirección positiva es hacia la derecha. Entonces, la posición de los puntos de la recta a, en dependencia de los signos de sus coordenadas, puede ser ubicada del siguiente modo: estarán situados a la derecha del origen de coordenadas O los puntos que tengan coordenadas positivas, y, a la izquierda, los que tengan coordenadas negativas.

Generalmente, la coordenada de un punto arbitrario se designa con la letra x. Cuando se consideran unos cuantos puntos, éstos se designan, frecuentemente, con una misma letra y diferentes índices, por ejemplo: M_1, M_2, ..., M_n. Las coordenadas de estos puntos, entonces, se designan también con una letra, pero con los índices correspondientes: x_1, x_2, ..., x_n.

Si se quiere indicar, abreviadamente, que el punto dado tiene la coordenada dada, se escribe entre paréntesis su coordenada,

---

*) Carece de sentido agregar tal o cual signo a las longitudes de los segmentos, si éstos se consideran como segmentos arbitrarios de un plano y no están situados en algún eje. En estos casos se pueden designar las longitudes de los segmentos como en la geometría elemental, sin las notaciones del módulo; esto lo haremos muy a menudo a continuación (véase, por ejemplo, el n° 40, en donde la longitud del segmento se ha designado por CM en vez de $|CM|$).

junto a la notación del mismo punto, por ejemplo: $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, ..., $M_n(x_n)$.

5. Demostraremos seguidamente dos teoremas sencillos, pero importantes. Se refieren al eje en el que se ha establecido un sistema de coordenadas.

Teorema 1. *Cualesquiera que sean los dos puntos del eje, $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$, siempre subsiste la igualdad*

$$M_1M_2 = x_2 - x_1. \qquad (1)$$

Demostración. Como consecuencia de la identidad fundamental (nº 3), tenemos:

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2;$$

de donde

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1.$$

Pero $OM_2 = x_2$, $OM_1 = x_1$, por lo tanto,

$$M_1M_2 = x_2 - x_1,$$

que es lo que se quería demostrar.

La esencia de este teorema puede ser expresada del modo siguiente: *para obtener la magnitud de un segmento del eje es necesario restar la coordenada de su origen de la coordenada de su extremo.* (Véanse las figs. 3 y 4; téngase en cuenta que, en el caso de la fig. 4, la coordenada x_1 es negativa).

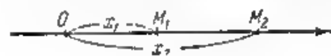


Fig. 3.



Fig. 4.

Teorema 2. *Si $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$ son dos puntos cualesquiera del eje y d es la distancia entre ellos, se tiene:*

$$d = |x_2 - x_1|. \qquad (2)$$

Demostración. Según el teorema anterior

$$M_1M_2 = x_2 - x_1;$$

pero la distancia entre los puntos M_1 y M_2 es igual al módulo de la magnitud del segmento $\overline{M_1M_2}$ y, por lo tanto

$$d = |x_2 - x_1|.$$

Con lo que el teorema queda demostrado.

Nota. Con toda la razón podemos escribir: $d = |x_2 - x_1|$ y $d = |x_1 - x_2|$ *). Teniendo en cuenta esto, el sentido del teorema

*) Puesto que los números $x_2 - x_1$ y $x_1 - x_2$ tienen un mismo módulo. (N. del T.)

demostrado se puede expresar del siguiente modo: *para calcular la distancia entre dos puntos del eje es necesario restar la coordenada de uno de ellos de la coordenada del otro y tomar el módulo del resto obtenido.*

Ejemplo 1. Dados los puntos $A(5)$, $B(-1)$, $C(-8)$, $D(2)$, hallar las magnitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$.

Solución. Según el teorema 1, tenemos:

$$AB=-1-5=-6,$$
$$CD=2-(-8)=10,$$
$$DB=-1-2=-3.$$

Ejemplo 2. Hallar la distancia entre los puntos $P(3)$ y $Q(-2)$.

Solución. Según el teorema 2,

$$d=|-2-3|=|-5|=5.$$

6. Si en cualquier eje se ha establecido un sistema de coordenadas, cada punto del mismo tendrá una coordenada determinada. Recíprocamente, para cualquier número x (real) tomado, habrá en el eje un punto determinado M, cuya coordenada es igual a x.

Convengamos en decir que el punto M *representa* al número x. Se llama *eje numérico*, al eje en el que se han establecido las coordenadas por el método descrito en el nº 4, de manera que sus puntos representan todos los números reales. En la fig. 5 están representados el eje numérico y unos cuantos números enteros.



Fig. 5.

Al representar los números por puntos del eje numérico, hacemos que nuestros conocimientos de todos los números en su conjunto sean geométricamente palpables. Además, esto nos da la posibilidad de enunciar las relaciones aritméticas en términos geométricos. Por ejemplo, todas las soluciones de las desigualdades $3<x<5$ pueden representarse prácticamente en forma de puntos del eje numérico, comprendidos entre dos de sus puntos, uno representado por el número 3 (es decir, que tiene la coordenada igual a 3) y el otro, por el número 5 (es decir, que tiene la coordenada igual a 5). En resumen, podemos decir que: las desigualdades $3<x<5$ determinan un intervalo (del eje numérico) limitado por los puntos 3 y 5.

Resulta ser de gran comodidad el expresar las relaciones aritméticas en términos geométricos, cosa que se emplea constantemente en todas las ramas de las matemáticas.

§ 3. Coordenadas cartesianas rectangulares en el plano. Noción de coordenadas cartesianas oblicuas

7. Si se ha indicado un método que permita determinar la posición de los puntos del plano mediante números, se dirá que en el plano se ha dado un *sistema de coordenadas*. Seguidamente consideraremos el sistema de coordenadas más sencillo y de mayor uso, llamado sistema c a r t e s i a n o r e c t a n g u l a r.

El *sistema de coordenadas cartesiano rectangular se determina por una unidad lineal para la medida de longitudes y por dos ejes, perpendiculares entre sí, numerados en cierto orden* (es decir, que se ha indicado cuál de éstos se toma por primero y cuál por segundo). El punto de intersección de los ejes se llama *origen de coordenadas*; los ejes mismos, *ejes coordenados*; además, el primero de ellos, se llama también *eje de abscisas* y, el segundo, *eje de ordenadas*.

Designemos el origen de coordenadas con la letra O; el eje de abscisas, con las letras Ox y el eje de ordenadas, con las letras Oy. Las letras x e y se colocan en las figuras al lado de los ejes correspondientes, sobre sus direcciones positivas, respecto del punto O, allí donde se interrumpen las representaciones de los ejes; de este modo, la misma situación de las letras O y x en la figura nos señala la dirección del eje de abscisas, y la situación de las letras O e y, la dirección del eje de ordenadas. Por lo tanto, ya no será menester denotar con flechas las direcciones positivas de los ejes; por esto mismo, a continuación, carecerán de ellas los ejes coordenados representados en las figuras.

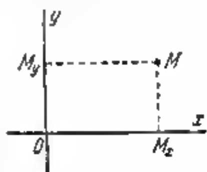


Fig. 6.

Sea M un punto arbitrario del plano. Hallemos las proyecciones del punto M sobre los ejes coordenados, es decir, tracemos por el punto M perpendiculares a los ejes Ox y Oy; designemos los pies de estas perpendiculares por M_x y M_y, respectivamente (fig. 6).

Se llaman coordenadas del punto M, en el sistema dado, a los números

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \tag{1}$$

en donde OM_x es la magnitud del segmento $\overline{OM_x}$ del eje de las abscisas, y OM_y, la magnitud del segmento $\overline{OM_y}$ del eje de las ordenadas. El número x se llama primera coordenada o abscisa del punto M, el número y, segunda coordenada u ordenada del mismo punto. Si se quiere indicar abreviadamente que el punto M tiene la abscisa x y la ordenada y, se emplea la notación $M(x; y)$. Si se deben considerar varios puntos, éstos frecuentemente se designan con una misma letra y diferentes índices, por ejemplo, así: M_1, M_2, ..., M_n;

las coordenadas de estos puntos se designan entonces con los índices correspondientes y los puntos considerados se escriben así: $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, ..., $M_n(x_n; y_n)$.

8. Si se ha dado un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, cada punto del plano tendrá en este sistema un par determinado de coordenadas x e y. Recíprocamente, para cualquier par de números (reales) x, y, en el plano habrá un punto determinado cuya abscisa, en el sistema dado, sea x, y cuya ordenada sea y. Para trazar un punto, conociendo sus coordenadas x e y, es necesario marcar en el eje de las abscisas, partiendo del origen, de coordenadas, un segmento $\overline{OM_x}$, cuya magnitud sea igual a x, y en el eje Oy un segmento $\overline{OM_y}$, cuya magnitud sea igual a y (las direcciones en las que se deben marcar los segmentos se determinan por los signos de los números x, y); luego, trazando por el punto M_x una recta paralela al eje Oy, y por el punto M_y una recta paralela al eje Ox, hallaremos el punto buscado M, como el punto de intersección de las rectas trazadas.

9. Ya se explicó en el nº 4 cómo se introduce un sistema de coordenadas en la recta. Introduzcamos ahora en cada uno de los ejes coordenados Ox y Oy un sistema de coordenadas, manteniendo la unidad lineal dada y las direcciones dadas de los ejes Ox y Oy, y tomando para cada eje el punto O como origen de coordenadas.

Consideremos un punto arbitrario M y su proyección M_x sobre el eje Ox.

El punto M_x tiene en el eje Ox una coordenada igual a la magnitud del segmento $\overline{OM_x}$; este valor lo habíamos llamado (en el nº 7) abscisa del punto M. De esto se deduce que: *la abscisa del punto M es igual a la coordenada del punto M_x en el eje Ox*. Análogamente: *la ordenada del punto M es igual a la coordenada del punto M_y en el eje Oy*. Estos resultados, a pesar de su clarividencia, son para nosotros de gran importancia. Estos son precisamente los que, al considerar los puntos en el plano, nos permiten aplicar los teoremas 1 y 2 (nº 5) que expresan las propiedades conocidas del sistema de coordenadas en la recta.

10. Para que nos sea más cómodo enunciar los resultados sucesivos, vamos a convenir ahora sobre algunos términos.

El eje Oy divide a todo el plano en dos semiplanos; de ellos, al situado en la dirección positiva del eje Ox lo llamaremos *derecho*, al otro, *izquierdo*.

Asimismo, el eje Ox divide al plano en dos semiplanos; al situado en la dirección positiva del eje Oy lo llamaremos *superior*, el otro, *inferior* *).

---

*) La justificación de estos nombres estriba en que, generalmente, los ejes coordenados se sitúan en las figuras de tal modo, que el eje Ox se vea dirigido hacia la derecha y el eje Oy hacia arriba.

11. Supongamos que M es un punto arbitrario del semiplano derecho; el segmento $\overline{OM_x}$ tiene entonces la dirección positiva del eje Ox; y, por lo tanto, la abscisa $x=\overline{OM_x}$ del punto M es positiva. Si el punto M está situado en el semiplano izquierdo, el segmento $\overline{OM_x}$ tiene la dirección negativa del eje Ox, y el número $x=\overline{OM_x}$ es negativo. Si, por último, el punto M está situado en el eje Oy, su proyección M_x sobre el eje Ox coincide con el punto O y $x=OM_x$ es igual a cero.

De este modo, *las abscisas de todos los puntos situados en el semiplano derecho son positivas* $(x>0)$; *las abscisas de todos los puntos situados en el semiplano izquierdo son negativas* $(x<0)$; *las abscisas de los puntos situados en el eje Oy son iguales a cero* $(x=0)$.

Efectuando un razonamiento análogo llegamos a la conclusión de que *las ordenadas de los puntos situados en el semiplano superior son positivas* $(y>0)$, *las ordenadas de los puntos situados en el semiplano inferior son negativas* $(y<0)$ *y las ordenadas de los puntos situados en el eje Ox son iguales a cero* $(y=0)$.

Señalemos, que las dos coordenadas del origen O son iguales a cero, $x=0$, $y=0$, ya que éste es el punto de intersección de los ejes; por eso, se distingue, precisamente, este punto (es decir, las dos coordenadas, s o l a m e n t e para el punto O son iguales a cero).

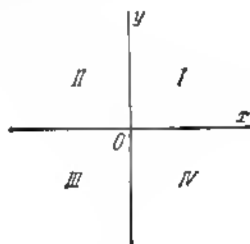


Fig. 7.

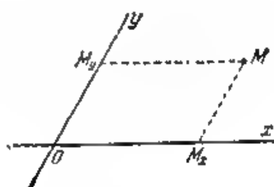


Fig. 8.

12. Los dos ejes coordenados dividen conjuntamente el plano en cuatro partes; éstas se llaman *cuadrantes coordenados* y se enumeran por una regla determinada. Precisamente, se llama primer cuadrante al que está situado a la vez en los semiplanos derecho y superior; segundo cuadrante, al que está situado en los semiplanos izquierdo y superior; tercer cuadrante, al que está situado en los semiplanos izquierdo e inferior y, cuarto cuadrante, al que está situado en los semiplanos derecho e inferior. (La enumeración de los cuadrantes coordenados se muestra en la fig. 7.)

Supongamos que las coordenadas del punto M son x e y. De lo precedente se deduce que:

si $x > 0$, $y > 0$, el punto M está situado en el primer cuadrante;
si $x < 0$, $y > 0$, el punto M está situado en el segundo cuadrante;
si $x < 0$, $y < 0$, el punto M está situado en el tercer cuadrante;
si $x > 0$, $y < 0$, el punto M está situado en el cuarto cuadrante.

El estudio de los semiplanos y de los cuadrantes coordenados es de gran utilidad, pues ayuda a hallar fácilmente la posición de los puntos dados según los signos de sus coordenadas.

13. Acabamos de estudiar el sistema cartesiano rectangular de coordenadas. Este sistema es el más usual. Sin embargo, en algunos casos, al examinar ciertos problemas, suelen ser más prácticos otros sistemas. Hagamos referencia, en pocas palabras, a los sistemas cartesianos cuyos ejes forman un ángulo cualquiera.

Este sistema de coordenadas se determina por una unidad de medida dada y por dos ejes Ox, Oy que se cortan en el punto O, formando un ángulo cualquiera (distinto de 0° y de 180°). Sea M un punto arbitrario del plano. Tracemos por el punto M rectas paralelas a los ejes Ox y Oy y designemos con M_x y M_y los puntos respectivos de intersección de estas rectas con estos ejes (fig. 8).

Se llaman coordenadas del punto M, en el sistema considerado, a los números

$$x = OM_x, \quad y = OM_y,$$

en donde OM_x es la magnitud del segmento $\overline{OM_x}$ del eje Ox y OM_y es la magnitud del segmento $\overline{OM_y}$ del eje Oy.

En el caso particular, en que el ángulo formado por los ejes Ox, Oy sea *recto*, el sistema de coordenadas descrito resulta ser el sistema cartesiano **rectangular**. Si el ángulo formado por los ejes Ox y Oy no es recto, este sistema de coordenadas se llama cartesiano **oblicuo**. En lo sucesivo, en este libro, no se usarán las coordenadas cartesianas oblicuas. Por eso, generalmente, a las coordenadas cartesianas **rectangulares** las llamaremos simplemente coordenadas cartesianas.

§ 4. Coordenadas polares

A continuación estudiaremos el llamado *sistema de coordenadas polares*; éste es generalmente muy útil y de frecuente empleo.

El sistema de coordenadas polares se determina por un punto O, llamado *polo*, por un rayo OA, que parte de este punto, llamado *eje polar* y por una unidad para la medida de longitudes. Además, para determinar por completo el sistema polar se debe indicar qué dirección de las rotaciones alrededor del punto O se toman por positivas. Por lo general, se toman por positivas las que se efectúan en «dirección contraria a la del movimiento de las agujas de un reloj».

Supongamos dados el polo y el eje polar (fig. 9). Consideremos un punto arbitrario M y designemos por ρ su distancia al punto O ($\rho = |OM|$), por θ, el ángulo que debe girar el rayo OA para coincidir con el rayo OM ($\theta = \angle AOM$). El ángulo θ se debe entender así como se ha convenido en trigonometría (o sea, teniendo en cuenta el signo y salvo un sumando de la forma $\pm 2n\pi$).

Los números ρ y θ se llaman coordenadas del punto M (respecto del sistema considerado). El número ρ se llama coordenada primera o radio polar, el número θ, coordenada segunda o ángulo polar.

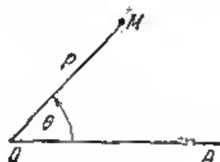


Fig. 9.

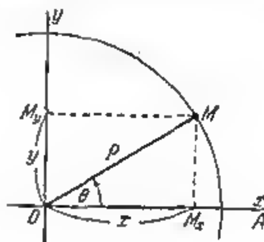


Fig. 10.

Nota 1. Entre todos los valores posibles del ángulo polar del punto M se elige uno, precisamente, aquél que satisface a la desigualdad

$$-\pi < \theta \leqslant \pi;$$

este valor se llama *principal*. Puede decirse, que como valor principal del ángulo polar se toma el ángulo en el cual debe girar el rayo OA para coincidir con OM; pero la rotación en uno u otro sentido no debe ser mayor de 180°. En particular, cuando la dirección del rayo OM es opuesta a la del rayo OA son posibles dos rotaciones de 180°; entonces se elige la rotación positiva, es decir, como valor principal del ángulo polar se toma $\theta = \pi$.

Nota 2. Si el punto M coincide con O, tenemos $\rho = |OM| = 0$. Por lo tanto, la primera coordenada del polo es igual a cero. Es evidente, que la segunda coordenada no tiene un valor determinado.

15. En algunos casos suelen usarse simultáneamente los sistemas cartesiano y polar. En tales casos surge el problema siguiente: calcular las coordenadas *cartesianas* de un punto conociendo sus coordenadas polares, y viceversa, calcular las coordenadas *polares* conociendo sus coordenadas cartesianas. Vamos a deducir ahora las fórmulas de la transformación de coordenadas (las fórmulas de paso de las coordenadas polares a las cartesianas y viceversa), para el caso particular en que *el polo del sistema polar coincida con el origen de las coordenadas cartesianas rectangulares, y el eje polar, con el semieje positivo de*

abscisas (fig. 10). Por otra parte, en la definición del ángulo polar se considerarán como positivas las rotaciones en la dirección en que se debe girar el semieje positivo Ox de la manera más corta, para hacerle coincidir con el semieje positivo Oy.

Sea M un punto arbitrario del plano, $(x; y)$ sus coordenadas cartesianas, $(\rho; \theta)$ sus coordenadas polares. Describamos una circunferencia de radio ρ con el centro en el polo O, y considerémosla como circunferencia trigonométrica y el eje Ox como diámetro inicial. Bajemos del punto M perpendiculares a los ejes Ox, Oy; sus pies los indicaremos por M_x y M_y, respectivamente, (véase la fig. 10). El segmento $\overline{OM_x}$ representa la línea del coseno del ángulo θ; por consiguiente, $OM_x = |OM| \cos\theta$. El segmento OM_y es la línea del seno del ángulo θ; por lo tanto, $OM_y = |OM| \operatorname{sen}\theta$. Pero $OM_x = x$, $OM_y = y$, $|OM| = \rho$; de este modo, de las relaciones precedentes, se tiene

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

Estas son las fórmulas que expresan las coordenadas cartesianas mediante las polares. Las expresiones de las coordenadas polares mediante las cartesianas se pueden obtener de estas mismas fórmulas o directamente por:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Advirtamos, que la fórmula $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$ no determina por completo el valor principal del ángulo polar; para precisar, es necesario saber si el valor de θ es positivo o negativo.

Ejemplo. Dadas las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto: $(-2; 2)$, hallar sus coordenadas polares (suponiendo que el polo coincide con el origen del sistema cartesiano, y que el eje polar coincide con el semieje positivo de las abscisas).

Solución. Aplicando las fórmulas (2) tenemos:

$$\rho = 2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\theta = -1.$$

De la segunda de estas igualdades hallamos que $\theta = \frac{3}{4}\pi$ o $\theta = -\frac{1}{4}\pi$. Como el punto dado está en el segundo cuadrante, debemos elegir como valor principal el primero de los valores indicados θ. Por lo tanto, $\rho = 2\sqrt{2}$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

2.

PROBLEMAS ELEMENTALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA PLANA

§ 5. Proyección de un segmento. Distancia entre dos puntos

16. En los estudios que se hacen a continuación se supone que se ha dado un s i s t e m a d e c o o r d i n a d a s determinado. Cuando digamos que se han dado unos puntos, se sobreentenderá que se conocen sus coordenadas. Un problema, en el que se pida buscar un punto desconocido, se considerará resuelto, si se han hallado sus coordenadas.

En este capítulo se estudiarán las soluciones de una serie de problemas elementales de la geometría analítica.

17. Sean dados un segmento arbitrario $\overline{M_1M_2}$ y un eje u (fig. 11).

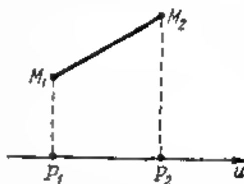


Fig. 11.

Bajemos desde los puntos M_1 y M_2 perpendiculares al eje u y designemos los pies de las mismas mediante P_1 y P_2, respectivamente. Consideremos el segmento $\overline{P_1P_2}$ del eje u cuyo o r i g e n y e x t r e m o son, respectivamente, las p r o y e c c i o n e s del o r i g e n y del e x t r e m o del segmento dado $\overline{M_1M_2}$. *La magnitud del segmento* $\overline{P_1P_2}$ *del eje* u *se llama proyección del segmento considerado* $\overline{M_1M_2}$ *sobre el eje* u, y se escribe así:

$$\text{pr}_u \overline{M_1M_2} = P_1P_2.$$

Según esta definición, la *proyección de un segmento sobre un eje es un número*; éste puede ser positivo (fig. 11), negativo (fig. 12, *a*) o igual a cero (fig. 12, *b*).

Frecuentemente, es necesario calcular en geometría analítica las proyecciones de un segmento sobre los ejes coordenados.

Convengamos en designar la proyección de un segmento arbitrario sobre el eje Ox con la letra mayúscula X, y la proyección sobre el eje Oy, con la letra mayúscula Y.

El problema del cálculo de X e Y, conociendo los puntos dados $M_1 M_2$ se resuelve aplicando el teorema siguiente:

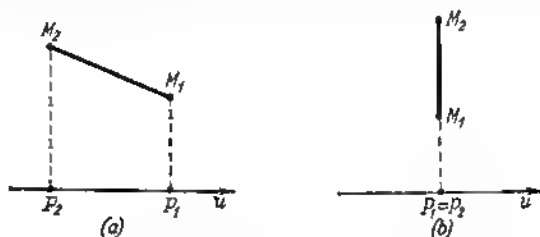


Fig. 12.

Teorema 3. *Cualesquiera que sean los puntos $M_1(x_1; y_1)$ y $M_2(x_2; y_2)$, las proyecciones del segmento $\overline{M_1 M_2}$ sobre los ejes coordenados están dadas por las fórmulas:*

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1. \tag{1}$$

Demostración. Bajemos desde los puntos M_1 y M_2 perpendiculares al eje Ox y designemos los pies de éstas mediante P_1 y P_2 (fig. 13). Según el nº 9, las coordenadas de estos puntos en el eje Ox son iguales a x_1, x_2, respectivamente. De aquí y según el teorema 1 nº 5,

$$P_1 P_2 = x_2 - x_1.$$

Pero $P_1 P_2 = X$, y, por lo tanto, $X = x_2 - x_1$. La igualdad $Y = Q_1 Q_2 = y_2 - y_1$ se establece por analogía. Con esto el teorema queda demostrado.

De este modo, *para obtener las proyecciones de un segmento sobre los ejes coordenados es necesario restar las coordenadas de su origen de las coordenadas respectivas de su extremo.*

Supongamos que el origen M_1 del segmento coincide con el origen de coordenadas O; entonces, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. En este caso, designemos el extremo del segmento con la letra M y las coordenadas del punto M con las letras x, y. Según las fórmulas (1), tenemos que

$$X = x, \quad Y = y; \tag{1'}$$

aquí X e Y son las proyecciones del segmento $\overline{OM}$. El segmento $\overline{OM}$ que une el origen de coordenadas con el punto M, se llama *radio vector de este punto.* Las igualdades (1') expresan el hecho

evidente de que las *coordenadas cartesianas rectangulares de un punto son las proyecciones de su radio vector sobre los ejes coordenados*

18. Uno de los problemas elementales que más frecuentemente se suele resolver en geometría analítica es el de la determinación de la distancia entre dos puntos dados. Cuando los puntos se dan mediante las coordenadas cartesianas rectangulares, la solución del problema la da el teorema siguiente:

Teorema 4. *Cualquiera que sea la posición de los puntos $M_1(x_1; y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$ en el plano, la distancia d entre ellos se determina por la fórmula*

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{2}$$

Demostración. Manteniendo las mismas notaciones del teorema anterior, designemos con la letra N el punto de intersección

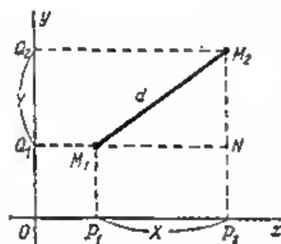


Fig. 13.

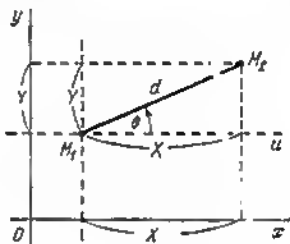


Fig. 14.

de las rectas M_1Q_1 y M_2P_2 (fig. 13). Como el triángulo M_1M_2N es rectángulo, según el teorema de Pitágoras, tenemos

$$d=\sqrt{M_1N^2+M_2N^2}.$$

Pero, es evidente que las longitudes de los catetos M_1N y M_2N coinciden con los valores absolutos de las proyecciones X, Y del segmento $\overline{M_1M_2}$ sobre los ejes coordenados y, por lo tanto,

$$d=\sqrt{X^2+Y^2}.$$

Aplicando ahora el teorema 3, obtenemos

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo. Hallar la distancia entre los puntos $M_1(-2; 3)$ y $M_2(5; 4)$.
Solución. Aplicando la fórmula (2) tenemos:

$$d=\sqrt{[5-(-2)]^2+(4-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

19. Consideremos de nuevo el segmento $\overline{M_1M_2}$. Tracemos por su origen M_1 un rayo u que sea paralelo al eje Ox y que tenga el mismo sentido que éste (fig. 14). Designemos con θ el ángulo en el que hay que hacer girar el rayo u para que éste tenga la dirección del segmento $\overline{M_1M_2}$: este ángulo lo tomaremos así como está convenido en trigonometría (es decir, teniendo en cuenta el signo y a salvo de un sumando de la forma $\pm 2n\pi$).

El ángulo θ *lo llamaremos ángulo polar del segmento* $\overline{M_1M_2}$ *con respecto a los ejes coordenados*. Es evidente que θ representa el ángulo polar del punto M_2 en el sistema polar de coordenadas, que tiene el polo en el punto M_1 y cuyo eje polar coincide con el rayo u; la longitud d del segmento considerado representa en este sistema el radio polar del punto M_2.

Tomemos ahora el punto M_1 como origen de un nuevo sistema de coordenadas cartesiano, cuyos ejes tengan la misma dirección que los ejes del sistema cartesiano primitivo (en la fig. 14 los nuevos ejes están representados con rayas de trazo). Las proyecciones del segmento $\overline{M_1M_2}$ sobre los ejes respectivos de los sistemas primitivo y nuevo son iguales; los designaremos, como se hizo anteriormente, mediante X e Y.

Los números X, Y son las coordenadas cartesianas del punto M_2 en el nuevo sistema. Aplicando las fórmulas (1) del nº 15, obtenemos:

$$X = d\cos\theta, \qquad Y = d\operatorname{sen}\theta. \tag{3}$$

Las *fórmulas* (3) *expresan las proyecciones sobre los ejes coordenados de un segmento arbitrario mediante su longitud y su ángulo polar*.

Aplicando el teorema 3, de estas fórmulas hallamos:

$$x_2 - x_1 = d\cos\theta, \qquad y_2 - y_1 = d\operatorname{sen}\theta, \tag{4}$$

de donde

$$\cos\theta = \frac{x_2 - x_1}{d}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y_2 - y_1}{d}. \tag{5}$$

Aplicando las fórmulas (5) *podemos determinar el ángulo polar del segmento conociendo las coordenadas del extremo y del origen* (es necesario hallar antes d, aplicando la fórmula (2)).

En muchos casos resulta ser muy útil la fórmula

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{6}$$

que se deduce inmediatamente de la fórmula (4).

Ejemplo 1. Hallar las proyecciones del segmento sobre los ejes coordenados conociendo su longitud $d = 2\sqrt{2}$ y el ángulo polar $\theta = 135°$.

S o l u c i ó n. Aplicando las fórmulas (3), hallamos:

$$X = 2\sqrt{2}\cos 135^\circ = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2,$$

$$Y = 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,135^\circ = 2\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 2.$$

E j e m p l o 2. Hallar el ángulo polar del segmento que tiene la dirección del punto $M_1(5;\ \sqrt{3})$ al punto $M_2(6;\ 2\sqrt{3})$.

S o l u c i ó n. Empleando la fórmula (2), tenemos

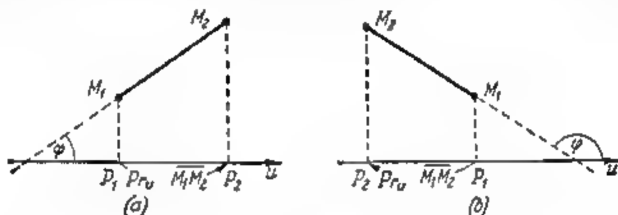
$$d = \sqrt{(6-5)^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = 2.$$

Aplicando ahora las fórmulas (5), hallamos:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto, el valor principal del ángulo es: $\theta = 60^\circ$.

20. Supongamos que u es un *eje arbitrario* y que φ es el ángulo que forma el segmento $\overline{M_1M_2}$ con él; precisamente φ es el ángulo en el que debe hacerse girar el eje u para que su dirección coincida con la del segmento $\overline{M_1M_2}$.



F i g. 15.

Para calcular la proyección del segmento $\overline{M_1M_2}$ sobre el eje u se emplea la fórmula

$$pr_u\overline{M_1M_2} = d\cos\varphi, \tag{7}$$

es decir, *la proyección de un segmento sobre un eje arbitrario es igual al producto de su longitud por el coseno del ángulo que forma con el eje.*

No es necesario dar la demostración de la fórmula (7), ya que realmente no se diferencia de la primera de las fórmulas (3) del n° 19. Obsérvese solamente que el signo del ángulo no altera el valor del coseno; por eso, *al ángulo φ, en la fórmula (7), se le puede atribuir el sentido que se da a los ángulos en la geometría elemental: sin tener en cuenta el signo u entre los límites de 0° a 180°.*

Si el ángulo φ es agudo, el $\cos\varphi$ y la proyección del segmento son positivos (fig. 15, *a*); si φ es obtuso, el $\cos\varphi$ y la proyección del segmento son negativos (fig. 15, *b*). Si φ es recto, la proyección es igual a cero.

Ejemplo. Dados los puntos $M_1(1; 1)$ y $M_2(4; 6)$, hallar la proyección del segmento $\overline{M_1M_2}$ sobre el eje que pasa por los puntos $A(1; 0)$ y $B(5; 3)$ en dirección de A a B.

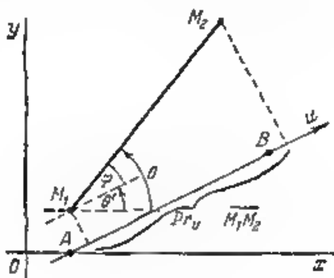


Fig. 16.

Solución. Designemos por u el eje considerado, por φ el ángulo formado por el segmento $\overline{M_1M_2}$ y el eje u, por θ y θ' los ángulos polares de los segmentos $\overline{M_1M_2}$ y $\overline{AB}$ (véase la fig. 16, en donde están representados los ángulos indicados con el vértice en el punto M_1). Es evidente que $\cos\varphi = \cos(\theta - \theta')$. Supongamos que X, Y son las proyecciones del segmento $\overline{M_1M_2}$ sobre los ejes coordenados; X', Y', las proyecciones del segmento $\overline{AB}$ sobre los mismos ejes; d y d', las longitudes de los segmentos $\overline{M_1M_2}$ y $\overline{AB}$. Por la fórmula (7),

$$\mathrm{pr}_u\,\overline{M_1M_2} = d\cos\varphi = d\cos(\theta-\theta') = d(\cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta').$$

De aquí que, aplicando las fórmulas (3) del nº 19, tenemos

$$\mathrm{pr}_u\overline{M_1M_2} = d\left(\frac{X}{d}\cdot\frac{X'}{d'} + \frac{Y}{d}\cdot\frac{Y'}{d'}\right) = \frac{XX' + YY'}{d'}.$$

Aplicando ahora los teoremas 3 y 4, hallamos:

$$X = 3,\ Y = 5,\ X' = 4,\ Y' = 3,\ d' = \sqrt{4^2+3^2} = 5.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{pr}_u\overline{M_1M_2} = \frac{3\cdot4 + 5\cdot3}{5} = \frac{27}{5}.$$

El problema está resuelto.

§ 6. Cálculo del área del triángulo

21. Sean dados tres puntos $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$ y $C(x_3; y_3)$, no situados en una recta. *Deduciremos ahora la fórmula que expresa el área S del triángulo ABC mediante las coordenadas de sus vértices.* Designemos con φ el ángulo formado por los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, y con d y d', las longitudes de los mismos. Como se sabe por la geometría elemental, el área del triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo formado por ellos, por lo tanto,

$$S = \frac{1}{2} dd' \operatorname{sen} \varphi. \tag{1}$$

Sea θ el ángulo polar del segmento $\overline{AB}$. Si la rotación más corta del segmento $\overline{AB}$ al segmento $\overline{AC}$, en el ángulo φ, es positiva, el ángulo polar del segmento $\overline{AC}$ se obtiene sumando el ángulo φ al ángulo θ; designándolo con θ' hallamos: $\theta' = \theta + \varphi$ (fig. 17, a).

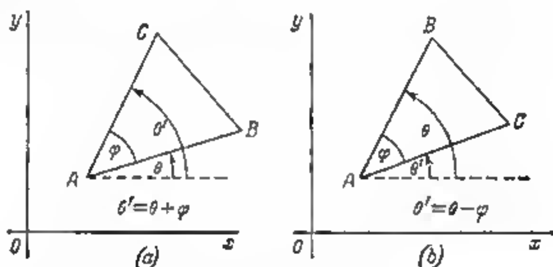


Fig. 17.

Si la rotación más corta de $\overline{AB}$ a $\overline{AC}$ es negativa, el ángulo polar θ' del segmento $\overline{AC}$ se obtiene restando el ángulo φ del ángulo θ; (en este caso , $\theta' = \theta - \varphi$ (fig. 17, b). Por lo tanto, $\varphi = \pm(\theta' - \theta)$; de aquí y de la fórmula (1) resulta

$$S = \pm \frac{1}{2} dd' \operatorname{sen}(\theta' - \theta) =$$

$$= \pm \frac{1}{2} dd' (\operatorname{sen}\theta' \cos\theta - \cos\theta' \operatorname{sen}\theta). \tag{2}$$

Designemos las proyecciones del segmento $\overline{AB}$ sobre los ejes coordenados mediante X, Y, y las proyecciones del segmento $\overline{AC}$,

mediante X' Y'. Por las fórmulas (3) del nº 19, tenemos:

$$X = d\cos\theta, \quad Y = d\,\mathrm{sen}\,\theta.$$
$$X' = d'\cos\theta', \quad Y' = d'\,\mathrm{sen}\,\theta'.$$

Abriendo paréntesis en el segundo miembro de la igualdad (2) y aplicando las últimas relaciones, hallamos

$$S = \pm\frac{1}{2}(XY' - X'Y). \qquad (3)$$

Por el teorema 3 del nº 17,

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1,$$
$$X' = x_3 - x_1, \quad Y' = y_3 - y_1.$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (3), obtenemos:

$$S = \pm\frac{1}{2}\{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\}. \qquad (4)$$

La expresión que figura aquí entre corchetes representa un determinante de segundo orden *), por eso, la fórmula (4) se puede escribir también del modo siguiente

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

El resultado obtenido nos permite enunciar el siguiente teorema:

Teorema 5. *Cualesquiera que sean los tres puntos $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ y $C(x_3; y_3)$, no situados en una misma recta, el área S del triángulo ABC se da por la fórmula* (5). *El segundo miembro de esta fórmula es igual a $+S$, si la rotación más corta del segmento AB al segmento AC es positiva, e igual a $-S$, si esta rotación es negativa.*

Ejemplo. Dados los puntos $A(1; 1)$, $B(6; 4)$ y $C(8; 2)$, hallar el área del triángulo ABC.

Solución. Por la fórmula (5)

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -8 = -S.$$

Por lo tanto, $S = 8$. El hecho de que en este caso el segundo miembro de la fórmula (5) es negativo, pone de manifiesto que la rotación más corta del segmento $\overline{AB}$ al segmento $\overline{AC}$ es negativa.

§ 7. División de un segmento en una razón dada

22. Uno de los problemas elementales de la geometría analítica que más aplicaciones tiene es el de la división de un segmento en una razón dada. Antes de precisar el contenido

*) Las nociones fundamentales sobre los determinantes se dan en el apéndice (véase la pág. 216).

de este problema tenemos que explicar detalladamente qué se sobreentiende al hablar de *«la razón en que un punto divide un segmento dado»*.

Supongamos que se han dado en el plano dos puntos arbitrarios distintos, uno de los cuales se toma como primero y el otro como segundo. Designémolos en este mismo orden mediante M_1 y M_2. Tracemos por ellos una recta u, e indiquemos en ella la dirección positiva; de este modo, convertimos a ésta en un eje.

Supongamos ahora que M es un punto del eje u distinto del punto M_2 (fig. 18).

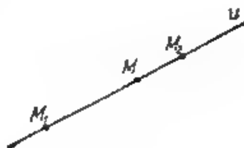


Fig. 18.

Si λ está definido por la igualdad

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}, \tag{1}$$

en donde M_1M y MM_2 *son las magnitudes de los segmentos dirigidos* $\overline{M_1M}$ y $\overline{MM_2}$ *del eje* u, *se dice que el punto* M *divide al segmento dirigido* $\overline{M_1M_2}$ en la razón λ.

Nota 1. El número λ no depende del modo en que se haya elegido la dirección positiva en el eje u, determinado por los puntos M_1 y M_2.
En efecto, si cambiamos en esta recta la dirección positiva por la opuesta, cambian simultáneamente de signo las magnitudes de los segmentos M_1M y MM_2 (conservando su módulo); es evidente que el valor de la razón $\frac{M_1M}{MM_2}$ no se altera.

Nota 2. El número λ no depende tampoco de la unidad elegida para la medida de longitudes. En efecto, al cambiar la unidad de medida, las magnitudes de todos los segmentos del eje M_1M_2 se multiplican por un mismo número y, por lo tanto, la razón $\frac{M_1M}{MM_2}$ no varía.

Nota 3. Si el punto M coincidiese con el punto M_2, tendríamos que la igualdad (1) no determinaría ningún número (ya que $MM_2 = 0$). En este caso decimos (por razones que se aclararán en el siguiente n°) que la razón $\frac{M_1M}{MM_2}$ es «infinita».

23. Supongamos que se ha elegido en la recta M_1M_2 la dirección positiva de tal modo, que el segmento $\overline{M_1M_2}$ tiene la misma dirección positiva; M_1M_2 será, entonces, un número positivo. Si el punto M está situado entre los puntos M_1 y M_2, los números M_1M y MM_2 serán también positivos y, por tanto, la razón $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$ será positiva. Si el punto M se aproxima al punto M_1, el número λ se aproxima a cero (λ se anula cuando el punto M coincide con el punto M_1); si el punto M se aproxima al punto M_2, λ crece indefinidamente, o como se dice, tiende al infinito (por eso se dice que λ es «infinito» cuando el punto M coincide con el punto M_2).

Supongamos ahora que el punto M está situado en la recta determinada por los puntos M_1 y M_2, fuera del segmento $\overline{M_1M_2}$. En este caso, uno de los números M_1M, MM_2 es positivo y, el otro, negativo; y, como M_1M y MM_2 son magnitudes de distintos signos, $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$ será un número negativo.

24. En geometría analítica el problema de la división de un segmento en una razón dada consiste en lo siguiente: *hallar las coordenadas del punto M (desconocido) que divide el segmento $\overline{M_1M_2}$ en una razón dada λ, si se conocen las coordenadas de los dos puntos $M_1(x_1; y_1)$ y $M_2(x_2; y_2)$.*

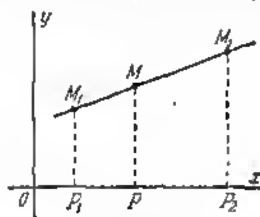


Fig. 19.

La solución de este problema la da el siguiente teorema:

Teorema 6. *Si el punto $M(x; y)$ divide el segmento $\overline{M_1M_2}$ en la razón λ, las coordenadas de este punto se expresan mediante las fórmulas*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (2)$$

Demostración. Designemos con P_1, P_2 y P las proyecciones respectivas de los puntos M_1, M_2 y M sobre el eje Ox (fig. 19). Aplicando el teorema de la geometría elemental sobre la proporcionalidad de los segmentos de las rectas, comprendidos entre rectas paralelas, tenemos:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda. \qquad (3)$$

Según el teorema 3 (nº 17),

$$P_1P=x-x_1, \quad PP_2=x_2-x.$$

Por esto y por la igualdad (3), tenemos

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

Despejando la incógnita x, hallamos:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

De este modo, hemos obtenido la primera de las fórmulas (2). La segunda se obtiene análogamente proyectando sobre el eje Oy. El teorema queda demostrado.

N o t a. Las fórmulas (2) carecen de sentido, si $\lambda=-1$, puesto que los denominadores se anulan $(1+\lambda=0)$.

Pero en este caso el problema estudiado no tiene solución: en efecto, ningún punto puede dividir al segmento $\overline{M_1M_2}$ en la razón $\lambda=-1$, ya que, si $\frac{M_1M}{MM_2}=-1$, tendríamos que $M_1M=-MM_2$ y $M_1M+MM_2=M_1M_2=0$, lo que es imposible, puesto que los puntos M_1 y M_2 se suponen distintos.

25. Señalemos un caso particular del teorema anterior, muy importante: *si* $M_1(x_1;\ y_1)$ y $M_2(x_2;\ y_2)$ *son dos puntos arbitrarios y* $M(x;\ y)$ *es el punto medio del segmento* $\overline{M_1M_2}$, *se tiene*

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Estas igualdades se deducen de las fórmulas (2) nº 24 para $\lambda=1$ *). Por consiguiente, podemos afirmar *que cada coordenada del punto medio del segmento es igual a la semisuma de las coordenadas correspondientes de sus extremos.*

E j e m p l o 1. Dados los puntos $M_1(1;\ 1)$ y $M_2(7;\ 4)$, hallar, en la recta que estos puntos determinan, un punto M que esté situado entre los puntos M_1 y M_2 y que esté dos veces más próximo al punto M_1 que al punto M_2.

S o l u c i ó n. El punto buscado divide al segmento $\overline{M_1M_2}$ en la razón $\lambda=\frac{1}{2}$. Aplicando las fórmulas (2) del nº 24, hallamos las coordenadas de este punto: $x=3$, $y=2$.

E j e m p l o 2. Dados los puntos $M_1(1;\ 1)$ y $M_2(7;\ 4)$, hallar, en la recta M_1M_2, fuera del segmento limitado por los puntos M_1 y M_2, un punto M que esté dos veces más próximo al punto M_1 que al punto M_2.

S o l u c i ó n. El punto buscado divide al segmento $\overline{M_1M_2}$ en la razón $\lambda=-\frac{1}{2}$. Aplicando las fórmulas (2) del nº 24, hallamos las coordenadas de este punto: $x=-5$, $y=-2$.

E j e m p l o 3. Dados los vértices de un triángulo $A(6;\ -1)$, $B(-1;\ 7)$, $C(1;\ 2)$, hallar la longitud de su bisectriz interior trazada desde el vértice A.

S o l u c i ó n. Designemos con M el punto de intersección de la bisectriz considerada y el lado BC, con c y b las longitudes de los lados AB y AC. Como bien se sabe por la geometría elemental, la bisectriz trazada desde cualquier vértice del triángulo divide al lado opuesto de éste vértice en partes proporcionales a los lados adyacentes. De este modo, el punto M divide al segmento

---

*) Si M es el punto medio del segmento $\overline{M_1M_2}$, se tiene que $M_1M=MM_2$, y, por lo tanto, $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}=1$.

$\overline{BC}$ en la razón λ, siendo

$$\lambda = \frac{BM}{MC} = \frac{c}{b}.$$

Aplicando la fórmula (2) del nº 18, hallamos las longitudes de los lados AB y AC:

$$c = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-7)^2} = 10, \quad b = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^2} = 5.$$

Por lo tanto, $\lambda = 2$. Aplicando las fórmulas (2) del nº 24, hallamos las coordenadas del punto M: $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{11}{3}$.

Aplicando de nuevo las fórmulas (2) del nº 18, obtenemos la longitud de la besectriz buscada: $AM = \frac{14}{3}\sqrt{2}$.

Ejemplo 4. En los puntos $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ están situadas las masas m_1, m_2, m_3. Hallar el centro de gravedad de este sistema de masas.

Solución. Hallemos, en primer lugar, el centro de gravedad $M'(x'; y')$ de un sistema de dos masas, m_1 y m_2. Por la conocida regla de la mecánica, el centro de gravedad del sistema de estas masas divide al segmento $\overline{M_1M_2}$ en partes inversamente proporcionales a las masas m_1 y m_2, es decir, en la razón $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$. Por las fórmulas (2) del nº 24, hallamos:

$$x' = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

$$y' = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1} y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Sea $M(x; y)$ el centro de gravedad del sistema de tres masas m_1, m_2, m_3. La posición del punto M no varía al concentrar las masas m_1 y m_2 en el punto M'. Mejor dicho, el punto M es el centro de gravedad del siguiente sistema de dos masas: de la masa m_3 colocada en el punto M_3, y de la masa $m_1 + m_2$ colocada en el punto M'. Por tanto, podemos hallar el punto M como el punto que divide al segmento $\overline{M'M_3}$ en la razón $\lambda = \frac{m_3}{m_1 + m_2}$.

Aplicando las fórmulas (2) del nº 24, obtenemos:

$$x = \frac{x' + \frac{m_3}{m_1 + m_2} x_3}{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_3}{m_1 + m_2} x_3}{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$y = \frac{y' + \frac{m_3}{m_1 + m_2} y_3}{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{\frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_3}{m_1 + m_2} y_3}{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Nota. Si se da un sistema de masas m_1, m_2, ..., m_k, situadas en los puntos $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, ..., $M_k(x_k; y_k)$, las coordenadas del centro

de gravedad de este sistema se obtienen por las fórmulas

$$x=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k},$$

$$y=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\ldots+y_km_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k}.$$

Para su deducción se deben aplicar las fórmulas (2) del nº 24 y el método de inducción matemática.

§ 8. Transformación de un sistema de coordenadas cartesianas en otro por traslado paralelo de los ejes

26. Como ya sabemos, la posición de las figuras geométricas consideradas en los problemas de la geometría analítica se determina con relación a un sistema de coordenadas. Sin embargo, puede surgir la necesidad de hacer un cambio del sistema de coordenadas,

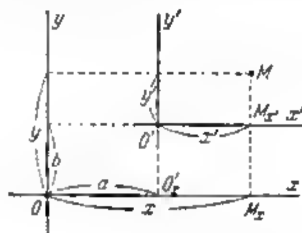


Fig. 20.

con respecto al cual se dan los datos del problema considerado, a otro sistema que, por ciertas razones, resulta ser más conveniente. Pero, generalmente, un punto arbitrario tiene diferentes coordenadas en diferentes sistemas de coordenadas. Por eso, cuando al considerar una cuestión se utilizan dos sistemas de coordenadas, surge la necesidad de calcular las coordenadas de un punto arbitrario en uno de estos sistemas, conociendo sus coordenadas en el otro sistema. En este caso se utilizan las fórmulas de transformación de coordenadas, conforme al cambio efectuado del sistema.

27. En primer lugar vamos a establecer las fórmulas de transformación de coordenadas cartesianas en una traslación paralela de los ejes, es decir, vamos a efectuar un cambio del sistema cartesiano de coordenadas, según el cual, el origen de coordenadas cambia de posición y las direcciones de los ejes (y la unidad de medida) se mantienen inalterables.

Sean Ox y Oy los ejes coordenados primitivos, e $O'x'$ y $O'y'$, los ejes nuevos (fig. 20). *Las coordenadas primitivas del nuevo origen $O'(a;\ b)$ determinan la posición de los ejes nuevos con respecto*

al sistema primitivo. Al número a lo llamaremos magnitud de traslación en dirección del eje Ox y al número b, magnitud de traslación en dirección del eje Oy. Un punto arbitrario M del plano tiene ciertas coordenadas $(x; y)$ respecto a los ejes primitivos; este mismo punto tendrá otras coordenadas respecto a los ejes nuevos: $(x'; y')$. Nuestro propósito consiste en establecer las fórmulas que expresen x, y mediante x', y' (o x', y' mediante x, y).

Proyectemos el punto O' sobre el eje Ox y el punto M sobre los ejes Ox y $O'x'$.

Designemos la proyección del punto O' sobre el eje Ox por O'_x, las proyecciones del punto M sobre los ejes Ox y $O'x'$ por M_x y $M_{x'}$. Evidentemente, la magnitud del segmento O'_xM_x del eje Ox es igual a la magnitud del segmento $O'M_{x'}$ del eje $O'x'$. Pero $O'M_{x'}=x'$; por lo tanto, $O'_xM_x=x'$. Además, $OO'_x=a$, $OM_x=x$. Por la identidad fundamental (véase n° 3).

$$OM_x=OO'_x+O'_xM_x;$$

por esto, y por las razones expuestas anteriormente, tenemos que $x=x'+a$. Trazando las proyecciones sobre los ejes Oy y $O'y'$ de modo análogo, hallamos que $y=y'+b$.

De suerte que,

$$x=x'+a, \quad y=y'+b. \tag{1}$$

Estas son las fórmulas buscadas. Se pueden escribir también del modo siguiente:

$$x'=x-a, \quad y'=y-b \tag{1'}$$

El resultado obtenido se puede enunciar así: *al hacer un traslado paralelo del sistema cartesiano de coordenadas en la magnitud a, en dirección del eje Ox, y en la magnitud b, en dirección del eje Oy, las abscisas de todos los puntos disminuyen en la magnitud a, y las ordenadas, en la magnitud b.*

§ 9. Transformación de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en otro por rotación de los ejes

28. Vamos a establecer a continuación las fórmulas de transformación de coordenadas cartesianas rectangulares en otras al efectuar una rotación de los ejes, es decir, al hacer un cambio del sistema cartesiano rectangular de coordenadas, según el cual, los dos ejes giran en un mismo ángulo y en una misma dirección, y el origen de coordenadas, así como la unidad de medida, se mantienen inalterables.

Sean Ox y Oy los ejes primitivos, Ox' y Oy' los ejes nuevos (fig. 21). *El ángulo que deben girar los ejes primitivos para coincidir con los nuevos determina la posición de los ejes nuevos con*

respecto al sistema primitivo. Este ángulo se designará con la letra α y se definirá así como en la trigonometría (las rotaciones positivas se definen como en el nº 15).

Un punto arbitrario M del plano tiene ciertas coordenadas $(x; y)$ respecto a los ejes primitivos; este mismo punto tendrá, por lo general, otras coordenadas $(x'; y')$ respecto a los ejes nuevos. Precisamente, $x = OM_x$, $y = OM_y$, $x' = OM_{x'}$, $y' = OM_{y'}$ (véase la fig. 21).

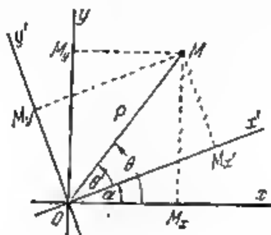


Fig. 21.

Nuestro propósito consiste en establecer las fórmulas que expresen x', y' mediante x, y o x, y mediante x', y'.

Designemos con (ρ, θ) las coordenadas polares del punto M, tomando Ox como eje polar, y con (ρ, θ'), las coordenadas del mismo punto M, tomando Ox' como eje polar (en cada caso $\rho = |OM|$). Es evidente que $\theta = \theta' + \alpha$. Según las fórmulas (1) del nº 15,

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta,$$

y análogamente,

$$x' = \rho \cos\theta', \quad y' = \rho \operatorname{sen}\theta'.$$

De este modo,

$$x = \rho\cos\theta = \rho\cos(\theta' + \alpha) = \rho(\cos\theta' \cos\alpha - \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\alpha) =$$
$$= \rho\cos\theta' \cos\alpha - \rho \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\alpha = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha.$$
$$y = \rho \operatorname{sen}\theta = \rho \operatorname{sen}(\theta' + \alpha) = \rho(\cos\theta' \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\theta' \cos\alpha) =$$
$$= \rho\cos\theta' \operatorname{sen}\alpha + \rho \operatorname{sen}\theta' \cos\alpha = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha.$$

Así pues

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha, \\ y &= x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Estas son las fórmulas buscadas, es decir, las fórmulas que expresan las coordenadas primitivas $(x; y)$ de un punto arbitrario M mediante las coordenadas nuevas $(x'; y')$ de este mismo punto al girar los ejes en un ángulo α.

Las fórmulas que expresan las coordenadas nuevas x', y' del punto M mediante sus coordenadas primitivas x, y, se pueden obtener de las igualdades (1), considerándolas como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x', y' y resolviendo este sistema respecto a x', y'. Pero estas fórmulas se pueden obtener inmediatamente mediante el razonamiento siguiente: si el sistema nuevo se obtiene girando el sistema primitivo en un ángulo α, el sistema primitivo se obtendrá girando *el sistema nuevo* en el ángulo $-\alpha$; por tanto, en las igualdades (1) se pueden permutar las coordenadas primitivas y nuevas, cambiando a la vez α por $-\alpha$. Efectuando esta transformación obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha, \\ y' &= -x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

que era lo deseado.

§ 10. Transformación de las coordenadas cartesianas rectangulares al efectuar un cambio de origen y una rotación de los ejes

29. A continuación estudiaremos un desplazamiento de los ejes realizado mediante un traslado paralelo y una rotación sucesiva (se supone que la unidad de medida queda inalterable).

Designemos con a la magnitud de traslación del sistema en dirección del eje Ox; con b, la magnitud de traslación del sistema en dirección de eje Oy, y con α el ángulo de rotación. Sean $O'x'$ y $O'y'$ los ejes nuevos. Un punto arbitrario M del plano tiene

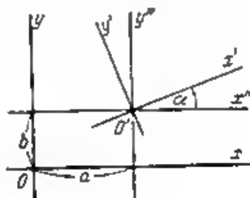


Fig. 22.

ciertas coordenadas $(x; y)$ respecto a los ejes primitivos; este mismo punto tendrá, por lo general, otras coordenadas $(x'; y')$ respecto a los nuevos ejes. Nuestro propósito consiste en establecer las fórmulas que expresen x', y' mediante x, y, así como las que expresen x, y mediante x', y'.

Para resolver este problema introducimos un sistema auxiliar de coordenadas, cuyos ejes tengan la dirección de los ejes del sistema primitivo y cuyo origen coincida con el origen del sistema nuevo (fig. 22); sean $O'x''$ y $O'y''$ los ejes del sistema auxiliar y x'', y'' las coordenadas del punto M respecto a estos ejes. Como el sistema auxiliar se obtiene por un traslado paralelo del sistema primitivo en la magnitud a en dirección del eje Ox y en la magnitud b en dirección del eje Oy, por el n° 27, tenemos:

$$x = x'' + a,$$
$$y = y'' + b.$$

Como después, el sistema nuevo se obtiene por rotación del sistema auxiliar en el ángulo α, según el n° 28, tendremos:

$$x'' = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha,$$
$$y'' = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha.$$

Sustituyendo estas expresiones de x'', y'' en los segundos miembros de las igualdades anteriores, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a, \\ y &= x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Despejando aquí x', y', hallamos:

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\operatorname{sen}\alpha, \\ y' &= -(x-a)\operatorname{sen}\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Los dos últimos pares de fórmulas son las buscadas.

Las fórmulas (1) expresan las coordenadas primitivas de un punto arbitrario mediante sus coordenadas nuevas; las fórmulas (2) expresan, por el contrario, las coordenadas nuevas mediante las primitivas.

El resultado obtenido se expresa en el siguiente teorema:

Teorema 7. *Si los ejes de un sistema cartesiano rectangular se trasladan en una magnitud a en dirección del eje Ox y en una magnitud b en dirección del eje Oy, y, además, giran un ángulo α (manteniendo inalterable la unidad de medida), las fórmulas de transformación de las coordenadas, correspondientes a este cambio del sistema, son*

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a, \\ y &= x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Estas fórmulas expresan las coordenadas primitivas x, y de un punto arbitrario del plano, mediante sus coordenadas nuevas x', y', y son

algebraicamente equivalentes a las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\operatorname{sen}\alpha, \\ y' &= -(x-a)\operatorname{sen}\alpha + (y-b)\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

que expresan las coordenadas nuevas mediante las coordenadas primitivas.

Ejemplo. Escribir las fórmulas de transformación de coordenadas que corresponden a un traslado de origen al punto O' (2; 3) y a una rotación de los ejes en un ángulo de $+45°$.

Solución. Poniendo en las fórmulas (1) $a=2$, $b=3$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, hallamos las expresiones de las coordenadas primitivas mediante las nuevas:

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}+2,$$
$$y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+3.$$

De aquí (o de las fórmulas (2)) se obtienen las expresiones de las coordenadas nuevas mediante las primitivas:

$$x'=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{2}},$$
$$y'=\frac{-x+y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nota. Por lo general, los ejes coordenados se sitúan en las figuras de tal modo, que para hacer coincidir el semieje positivo de abscisas con el semieje positivo de ordenadas es necesario hacerle girar (del modo más corto) en dirección contraria a la de las agujas de un reloj. En este caso se dice que el sistema de coordenadas es de mano derecha. Sin embargo, a veces, se usa un sistema de ejes situado de otro modo, de manera que la rotación más corta del semieje positivo de abscisas hacia el semieje positivo de ordenadas tenga el sentido del movimiento de las agujas de un reloj. En este caso, se dice que el sistema de coordenadas es de mano izquierda.

Sean dados dos sistemas coordenados (cartesianos y rectangulares). Si los dos son de mano derecha, o de mano izquierda, se puede hacer coincidir los ejes de uno de ellos con los del otro mediante un traslado paralelo y una rotación sucesiva en cierto ángulo; por esto, y por lo anterior, se deduce que, al pasar de uno de estos sistemas al otro, las coordenadas de cualquier punto del plano se transforman por las fórmulas (1). Si uno de los sistemas es de mano derecha y el otro de mano izquierda, no se podrá hacer coincidir los ejes de un sistema con los ejes del otro mediante una traslación y una sucesiva rotación; precisamente, si hacemos coincidir el semieje positivo de abscisas de uno de los sistemas (el primitivo) con el semieje positivo de abscisas del otro sistema (el nuevo) mediante un traslado y una rotación, los semiejes positivos de ordenadas tendrán direcciones opuestas entre sí. Por tanto, al pasar en este caso de uno de los sistemas al otro, la transformación de coordenadas se determinará por las fórmulas que resultan al cambiar el signo de y', que figura en las fórmulas (1). De este modo, las fórmulas generales de transformación de coordenadas cartesianas rectangulares (sin alteración de la unidad de medida) se pueden escribir así:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha \pm y'\operatorname{sen}\alpha + a, \\ y &= x'\operatorname{sen}\alpha \pm y'\cos\alpha + b, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

en donde a, b, son las coordenadas primitivas del origen nuevo, y α es el ángulo que hay que hacer girar al eje primitivo de abscisas para que tenga la misma dirección que el nuevo; los signos superiores en las fórmulas (3) corresponden al caso en que se pasa de un sistema de mano derecha a otro sistema del mismo sentido, o de un sistema de mano izquierda a otro sistema de igual sentido; los signos inferiores corresponden al caso de un sistema de sentido contrario. Es conveniente tener en cuenta también que, si el sistema primitivo es de mano izquierda, el ángulo α se considera positivo en la dirección del movimiento de las agujas de un reloj.

3.

ECUACION DE UNA LINEA

§ 11. Noción de ecuación de una línea. Ejemplos de expresiones de líneas mediante ecuaciones

30. En la geometría elemental sólo se estudian detalladamente unas cuantas líneas: la recta, la circunferencia, las quebradas. Sin embargo, las necesidades de la técnica plantean ante las matemáticas el problema general del estudio de una multitud de líneas de diversas formas y con diferentes propiedades. La resolución de este problema general requiere métodos más perfectos que los que emplea la geometría elemental. Estos métodos los proporciona el álgebra y el análisis matemático. El principio de la aplicación de los métodos del álgebra y del análisis se basa en un método semejante de representación de las líneas. Este método consiste en representar las líneas mediante ecuaciones.

31. Sean x e y dos cantidades variables arbitrarias. Esto significa que por las notaciones x, y se sobreentienden unos números (reales) cualesquiera. Una relación de la forma $F(x, y)=0$, en donde $F(x, y)$ denota alguna expresión que contiene a x, y, se llama ecuación de dos variables, x, y, si la igualdad $F(x, y)=0$ no siempre tiene valor, o sea, si no es válida para cualquier par de números x, y. Así son, por ejemplo, las relaciones $2x+7y-1=0$, $x^2+y^2-25=0$, $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y-1=0$, etc., etc.

Si la relación $F(x, y)=0$ es válida para *cualesquiera* valores numéricos de x, y, se dice que es una *identidad*. Así son, por ejemplo, las relaciones $(x+y)^2-x^2-2xy-y^2=0$, $(x+y)(x-y)-x^2+y^2=0$, etc., etc.

A continuación, al considerar las ecuaciones de dos variables, puede ocurrir, que en el primer miembro de la ecuación figuren, además de x, y, otras letras como a, b, c, ...; en este caso se supondrá que éstas representan números fijos (aunque no estén indicados), denominados *parámetros* constantes de la ecuación. Por ejemplo, los parámetros de la ecuación $ax+by-1=0$ son a y b.

32. Se dice que dos números $x=x_0$, $y=y_0$ satisfacen a una ecuación de dos variables, si al sustituirlos en la ecuación, en lugar de las variables, resulta una igualdad verdadera. Por ejemplo, los números $x=3$, $y=4$ satisfacen a la ecuación $x^2+y^2-25=0$, puesto que al sustituir estos números en la ecuación, su primer miembro se anula; por el contrario, los números $x=1$, $y=2$, no satisfacen a esta ecuación, ya que al sustituirlos en ella obtenemos en el primer miembro un número diferente de cero.

33. Consideremos una ecuación arbitraria $F(x, y)=0$. Supongamos ahora que x e y no indican números cualesquiera, sino aquéllos que satisfacen a esta ecuación. En estas condiciones, las cantidades x, y pueden variar, pero ya no arbitrariamente una con relación a la otra: cada valor numérico de la cantidad x da lugar a valores numéricos posibles de la cantidad y. En virtud de esto, se dice que la ecuación $F(x, y)=0$ establece una dependencia funcional entre las variables x e y.

34. La noción de ecuación de una línea es fundamental en la geometría analítica. Ahora explicaremos qué entendemos por esto.

Supongamos dada una línea en el plano, en el cual se ha elegido un sistema de coordenadas.

Una ecuación de dos variables $F(x, y)=0$ se llama ecuación de la línea dada (con respecto al sistema de coordenadas elegido), *si satisfacen a ésta las coordenadas x, y de todos los puntos situados en la línea y no satisfacen a la misma las coordenadas de los puntos situados fuera de ella.*

De este modo, conociendo la ecuación de una línea para cualquier punto del plano, se puede resolver la cuestión: si está situado el punto en la línea o no. Para esto es suficiente sustituir en la ecuación las coordenadas variables por las del punto estudiado; si estas coordenadas satisfacen a la ecuación, el punto está situado en la línea, de lo contrario, no lo está.

Los métodos de la geometría analítica se basan en la definición citada; la esencia de ellos consiste en que el estudio de las líneas consideradas se efectúa mediante un análisis de sus ecuaciones.

35. En muchos problemas, la ecuación de la línea desempeña un papel primario y la misma línea se considera como algo secundario. Mejor dicho, a menudo se da previamente una ecuación y, por lo tanto, se determina cierta línea. Esto se debe a la necesidad de representar geométricamente las dependencias funcionales.

Si se da una ecuación y contestamos a la pregunta ¿"cuál es la línea que ella determina"? (o ¿cuál es la línea "dada por esta ecuación"?), resulta conveniente emplear la siguiente definición: *la línea determinada por la ecuación dada* (en un sistema coordenado) *es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen a esta ecuación.*

36. La línea determinada por una ecuación de la forma $y=f(x)$ se llama *gráfica* de la función $f(x)$. También se puede decir que la línea determinada por una ecuación arbitraria $F(x, y)=0$ es la gráfica de la dependencia funcional establecida entre x e y por la ecuación.

37. Las cantidades x, y se llaman *coordenadas variables*, puesto que se consideran como coordenadas de un punto variable. Si en

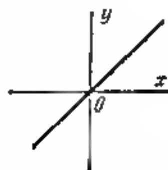


Fig. 23.

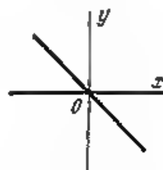


Fig. 24.

vez del cartesiano se emplea otro sistema de coordenadas, las coordenadas variables se deben designar con otras letras, así como se haya convenido para este sistema.

38. Veamos algunos ejemplos elementales de determinación de las líneas por ecuaciones.

1. La ecuación dada es $x-y=0$. Representándola en la forma $y=x$, llegamos a la conclusión de que: los puntos cuyas coordenadas satisfacen a esta ecuación, son aquéllos, y solamente aquéllos, que están situados en el primero o en el tercer cuadrante a iguales distancias de los ejes coordenados. Por lo tanto, el lugar geométrico de los puntos, cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación dada, representa la bisectriz del primero y tercer ángulos coordenados (fig. 23). Esta es la línea determinada por la ecuación $x-y=0$ (es a la vez la gráfica de la función $y=x$).

2. La ecuación dada es $x+y=0$. Representándola en la forma $y=-x$, llegamos a la conclusión de que: los puntos cuyas coordenadas satisfacen a esta ecuación, son aquéllos, y solamente aquéllos, que están situados en el segundo o cuarto cuadrante a igual distancia de los ejes coordenados. Por lo tanto, el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación dada, representa la bisectriz del segundo y cuarto ángulos coordenados (fig. 24). Esta es la línea determinada por la ecuación $x+y=0$ (es a la vez la gráfica de la función $y=-x$).

3. La ecuación dada es $x^2-y^2=0$. Representándola en la forma $(x-y)(x+y)=0$, llegamos a la conclusión de que: los puntos cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación dada, son aquéllos, y solamente aquéllos, que satisfacen a la ecuación $x-y=0$, o a la ecuación $x+y=0$. De este modo, la línea determinada por la

ecuación $x^2 - y^2 = 0$, se compone de los puntos de las dos bisectrices de los ángulos coordenados (fig. 25).

4. La ecuación dada es $x^2 + y^2 = 0$. Como para valores reales de x, y, los números x^2 e y^2 no pueden tener signos distintos, al sumarlos, éstos no pueden eliminarse; por tanto, si $x^2 + y^2 = 0$,

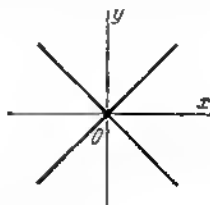


Fig. 25.

tendremos que $x = 0$ e $y = 0$. Así pues, a la ecuación dada satisfacen solamente las coordenadas del punto $O(0; 0)$. Es decir, el lugar geométrico de los puntos, cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ lo constituye un solo punto. En este caso, se dice que la ecuación determina una línea degenerada.

5. La ecuación dada es $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Como para cualesquiera valores de x e y, los números x^2 e y^2 no son negativos, se tiene que $x^2 + y^2 + 1 > 0$. Esto significa que no hay ningún punto cuyas coordenadas satisfagan a la ecuación dada; esta ecuación no determina en el plano ninguna figura geométrica.

6. La ecuación dada es $\rho = a \cos \theta$, en donde a es un número positivo y las variables ρ y θ son coordenadas polares. Designemos con M el punto cuyas coordenadas polares son $(\rho; \theta)$, con A el punto cuyas coordenadas polares son $(a; 0)$. Si $\rho = a \cos \theta$, el ángulo OMA es recto, y viceversa. Por lo tanto, el lugar geométrico de los puntos, cuyas coordenadas polares satisfacen a la ecuación $\rho = a \cos \theta$, representa una circunferencia de diámetro igual a OA (fig. 26).

7. Sea dada la ecuación $\rho = a\theta$, en donde a es un número positivo. Para figurarnos la línea determinada por esta ecuación, supongamos que θ crece partiendo de cero y observemos el movimiento correspondiente del punto variable $M(\rho; \theta)$, cuyas coordenadas satisfacen a esta ecuación. Si $\theta = 0$, también será $\rho = 0$. Si θ crece, partiendo de cero, tendremos que ρ aumentará proporcionalmente a θ (el número a es el coeficiente de proporcionalidad). Así se ve, que el punto variable $M(\rho; \theta)$, partiendo del polo del sistema de coordenadas, se mueve alrededor de éste (en dirección positiva) alejándose al mismo tiempo de él. De este modo, el punto M describe una espiral; la espiral determinada por la ecuación $\rho = a\theta$ se llama *espiral de Arquímedes* (fig. 27).

Si el punto $M(\rho;\ \theta)$ se mueve por la espiral de Arquímedes y, partiendo de una posición arbitraria, da una vuelta completa alrededor del polo en dirección positiva, el ángulo θ aumentará en 2π

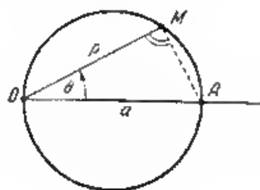


Fig. 26

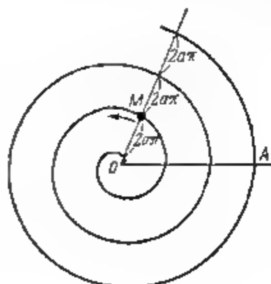


Fig. 27.

y el radio polar ρ en $2a\pi$. De aquí se deduce que la espiral de Arquímedes divide cada rayo polar en segmentos iguales (sin contar el segmento contiguo al polo); todos estos segmentos tienen una longitud constante, igual a $2a\pi$.

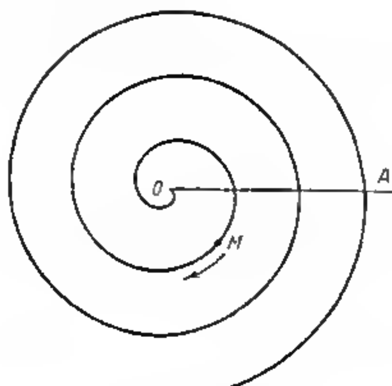


Fig. 28.

La ecuación $\rho = a\theta$, en donde a es un número **negativo**, determina una espiral de Arquímedes «invertida», cuyos puntos corresponden a valores negativos de θ (fig. 28).

8. La ecuación dada es $\rho=\frac{a}{\theta}$, en donde a es un número positivo; estudiemos la línea que ella determina. Tomemos un valor positivo de θ, por ejemplo $\theta=\frac{\pi}{2}$, a él le corresponde el punto $M_1\left(\frac{2a}{\pi};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Si aumentamos θ indefinidamente, tendremos que ρ tenderá a cero, puesto que es inversamente proporcional a θ; por lo tanto, el punto variable $M(\rho;\ \theta)$ se mueve alrededor del polo en dirección positiva

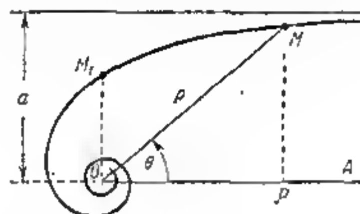


Fig. 29.

y, a su vez, tiende indefinidamente al polo (fig. 29). Supongamos ahora que θ disminuye desde el valor de $\frac{\pi}{2}$, tendiendo a cero; entonces tendremos que $\rho\to\infty$ y el punto $M(\rho;\ \theta)$ tenderá al infinito. Para estudiar más detalladamente el movimiento del punto M, hallemos su proyección sobre el eje polar y designémosla mediante P; es evidente, que $PM=\rho\operatorname{sen}\theta$ (véase la segunda fórmula (1) n° 15). Por la ecuación dada, se tiene, $\rho\operatorname{sen}\theta=a\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$. Pero como bien se sabe por el análisis, $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\to 1$ para $\theta\to 0$. Por tanto, PM tiende a a, si $\theta\to 0$. De aquí llegamos a la conclusión de que, al tender el punto M hacia el infinito, éste se aproxima a la recta paralela al eje polar situada a la distancia a del mismo.

Como vemos, la ecuación dada, así como en el ejemplo anterior, determina una espiral; esta espiral se llama *hiperbólica*.

La ecuación $\rho=\frac{a}{\theta}$, en donde a es un número negativo, determina una espiral hiperbólica «invertida», cuyos puntos corresponden a valores negativos de θ (fig. 30).

9. La ecuación dada es $\rho=a^{\theta}$, en donde a es un número positivo mayor que la unidad. Esta ecuación determina una espiral llamada *logarítmica*.

Para concebir las particularidades de la espiral logarítmica, supongamos que $\theta\to+\infty$; en este caso $\rho=a^{\theta}\to+\infty$ y, por tanto, el punto variable $M(\rho;\ \theta)$ se aleja indefinidamente del polo, al moverse alrededor de él en dirección positiva. Si, partiendo de una

posición arbitraria, el punto M da una vuelta completa alrededor del polo en dirección positiva, a su ángulo polar se le suma 2π y su radio polar se multiplica por $a^{2\pi}$ (puesto que $a^{\theta+2\pi}=a^{\theta}a^{2\pi}$). Por tanto, con cada vuelta alrededor del polo crece el radio polar del punto M y este crecimiento es en progresión geométrica (con la razón $a^{2\pi}$.)

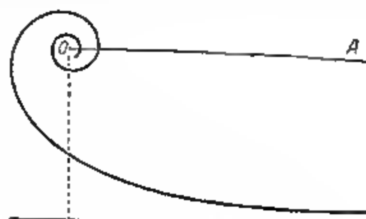


Fig. 30.

Supongamos ahora que $\theta\to-\infty$; entonces $\rho\to 0$ y el punto M, al girar alrededor del polo (en dirección negativa), se acerca indefinidamente a él (fig. 31).

Si a es menor que la unidad (siendo positivo), la ecuación $\rho=a^{\theta}$ determina una espiral logarítmica «invertida» (fig. 32). En este

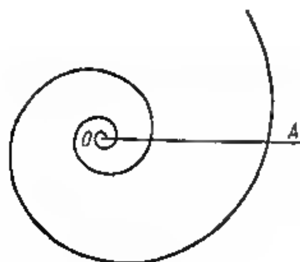


Fig. 31.

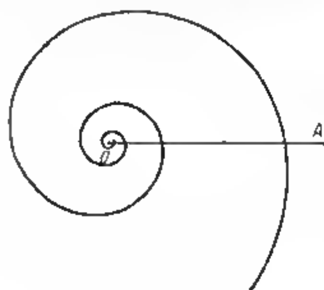


Fig. 32.

caso, al girar alrededor del polo en dirección positiva, el punto M se acerca indefinidamente al polo y, al hacerlo en dirección negativa, se aleja de él indefinidamente (ya que, si $0<a<1$, tenemos que $a^{\theta}\to 0$ para $\theta\to+\infty$ y $a^{\theta}\to+\infty$ para $\theta\to-\infty$).

Si $a=1$, la ecuación $\rho=a^{\theta}$ determina una circunferencia, pues para cualquier valor de θ se tiene que $\rho=1$.

Acabamos de exponer algunos ejemplos tan sencillos de ecuaciones, que las líneas determinadas por ellas se aprecian inmediatamente. En casos más complicados resulta más dificultoso, incluso la representación aproximada (con una exactitud dada) de la línea, cosa que exige la aplicación de diversos métodos del análisis y de la geometría analítica.

§ 12. Ejemplos de deducción de ecuaciones de líneas previamente dadas

39. En el párrafo anterior se expusieron algunos ejemplos de determinación de una línea mediante su ecuación. Ahora vamos a considerar algunos ejemplos de carácter opuesto; en cada uno de ellos la línea se define geométricamente y se trata de hallar su ecuación (o como se suele decir, «deducir» la ecuación de la línea definida geométricamente).

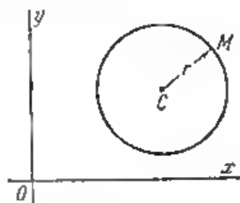


Fig. 33.

Si la línea se ha determinado como el lugar geométrico de los puntos que satisfacen a una condición determinada, expresando esta condición mediante coordenadas, obtenemos cierta dependencia entre ellas. Esta será la ecuación de la línea considerada, puesto que a ella satisfacen las coordenadas de un punto cuando, y sólo cuando, la situación de este punto satisface a la condición acordada, es decir, cuando el punto está situado en la línea dada.

40. Ejemplo. Dado un sistema cartesiano rectangular de coordenadas, deducir la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(\alpha; \beta)$ y radio igual a r (fig. 33).

Designemos el punto variable con la letra M y sus coordenadas (es decir, las coordenadas variables) con las letras x e y. La circunferencia dada es el lugar geométrico de los puntos, cada uno de los cuales está a la distancia r del punto C; por lo tanto, el punto M está situado en la circunferencia dada si, y sólo si,

$$CM = r. \qquad (1)$$

Por la fórmula (2) nº 18, tenemos $CM = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$. Sustituyendo en la igualdad (1) esta expresión de CM *) obtenemos:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r. \qquad (2)$$

*) Véase la llamada al final de la pág. 14.

Hemos hallado la ecuación que relaciona las cantidades x, y, y a la que satisfacen las coordenadas de aquellos puntos y sólo de aquellos que están situados en la circunferencia dada. Por lo tanto, esta es la ecuación buscada. El problema queda resuelto.

41. Elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad (2) obtenemos la e c u a c i ó n o r d i n a r i a d e u n a c i r c u n f e r e n c i a d e c e n t r o $C(\alpha; \beta)$ y r a d i o r:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2. \tag{3}$$

Esta ecuación se presenta frecuentemente en muchos problemas de la geometría *). Para $\alpha=0$, $\beta=0$, tenemos la e c u a c i ó n d e u n a c i r c u n f e r e n c i a c o n e l c e n t r o e n e l o r i g e n d e c o o r d e n a d a s:

$$x^2+y^2=r^2. \tag{4}$$

42. E j e m p l o. Deducir la ecuación de la trayectoria del punto M, que durante su movimiento está dos veces más próximo al punto $A(2; 0)$ que al punto $B(8; 0)$.

Designemos con x e y las coordenadas del punto M (es decir, las coordenadas variables). Por las condiciones del problema, el punto M siempre está dos veces más próximo al punto A que al punto B, o sea,

$$2AM=BM. \tag{5}$$

Por la fórmula (2) nº 18,

$$AM=\sqrt{(x-2)^2+y^2}, \quad BM=\sqrt{(x-8)^2+y^2}.$$

Por esto y por las fórmulas (5), tenemos:

$$2\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x-8)^2+y^2}. \tag{6}$$

Hemos obtenido la ecuación que relaciona las cantidades x e y. A ella satisfacen las coordenadas de cualquier punto de la trayectoria considerada y no satisfacen las coordenadas de los otros puntos del plano. Por lo tanto, ésta es la ecuación buscada. El problema queda resuelto. Solamente se puede tratar de modificar la forma de esta ecuación y reducirla a otra más simple. Con este fin, elevemos al cuadrado los dos miembros de la ecuación (6). Obtenemos la ecuación

$$4[(x-2)^2+y^2]=(x-8)^2+y^2,$$

la cual es equivalente a la ecuación (6) **). Abriendo paréntesis, hallamos:

$$4x^2-16x+16+4y^2=x^2-16x+64+y^2$$

o

$$x^2+y^2=16.$$

Una vez hallada esta ecuación de la trayectoria, podemos apreciar su forma. En efecto, comparando la ecuación obtenida con la ecuación (4) del nº 41, deducimos que: la ecuación considerada es una circunferencia que tiene el centro en el origen de coordenadas y el radio $r=4$.

---

*) Puede ocurrir que, al elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación, resulte una ecuación no equivalente a la original, o sea, que a ella satisfagan también tales valores de x e y que no satisfacen a la ecuación inicial. En el caso considerado no ocurrirá esto, pues la ecuación (3) es equivalente a la ecuación (2). En efecto, extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros de la ecuación (3), se tiene $+\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\pm r$. Pero es necesario tomar el signo $+$ en el segundo miembro, ya que en caso contrario resultaría una igualdad errónea. De este modo, la ecuación (2) se deduce de la ecuación (3), así como la ecuación (3) se deduce de la ecuación (2).

**) Se demuestra de igual modo que en el nº 41.

43. Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta en coordenadas polares, conociendo la distancia p del polo a la recta y el ángulo θ_0 del eje polar al rayo dirigido desde el polo y perpendicular a la recta (fig. 34).

Solución. Sea a una recta arbitraria, y P el pie de la perpendicular bajada del polo O a ella; según la condición, se conocen $OP = p$ y el ángulo θ_0 que forma el eje polar con el rayo OP. Tomemos en el plano un punto arbitrario

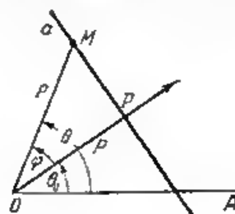


Fig. 34.

$M(\rho;\ \theta)$. Evidentemente, el punto M está situado en la recta a si, y sólo si, la proyección del punto M sobre el rayo OP coincide con el punto P, es decir, si $\rho\cos\varphi = p$, en donde $\varphi = \angle POM$. Observando que $\varphi = \theta - \theta_0$ (o que $\varphi = \theta_0 - \theta$), tenemos de aquí la ecuación buscada de la recta a en la forma $\rho\cos(\theta - \theta_0) = p$; aquí, las coordenadas variables son ρ y θ.

§ 13. El problema de la intersección de dos líneas

44. En geometría analítica frecuentemente se suele resolver el siguiente problema:

Dadas las ecuaciones de dos líneas,

$$F(x,\ y) = 0, \quad \Phi(x,\ y) = 0,$$

hallar sus puntos de intersección.

Como siempre se hace en geometría analítica, al decir «hallar los puntos», se supone, «calcular sus coordenadas». El principio de resolución de este problema se percibe inmediatamente de la definición de la ecuación de una línea, dada en el nº 34.

En efecto, cada punto de intersección de las líneas dadas es un punto común. Por lo tanto, las coordenadas de tal punto tienen que satisfacer tanto a la ecuación $F(x,\ y) = 0$ como a la ecuación $\Phi(x,\ y) = 0$. Resolviendo simultáneamente estas ecuaciones hallamos todos los puntos de intersección de las líneas dadas. Cada solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} F(x,\ y) = 0, \\ \Phi(x,\ y) = 0 \end{array}\right\}$$

proporciona uno de los puntos buscados. Claro está que la realización práctica de este principio general puede dar lugar a cálculos complicados.

Ejemplo 1. Dadas las ecuaciones de dos circunferencias $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ y $(x-3)^2+(y-5)^2=4$, hallar sus puntos de intersección.

Solución. Abriendo paréntesis y pasando todos los términos al primer miembro, podemos escribir las ecuaciones dadas en la forma:

$$x^2+y^2-2x-6y+6=0, \qquad x^2+y^2-6x-10y+30=0. \tag{1}$$

Restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos: $4x+4y-24=0$ o $y=-x+6$. Agrupando esta ecuación con la primera ecuación de las dadas, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-2x-6y+6=0, \\ y=-x+6. \end{array}\right\} \tag{2}$$

El sistema (2) es equivalente al sistema (1) *). Por esto, el problema se reduce a la resolución de este sistema. Poniendo $y=-x+6$ en la primera de las ecuaciones (2), se tiene:

$$x^2+x^2-12x+36-2x+6x-36+6=0, \quad \text{o} \quad x^2-4x+3=0.$$

De aquí que $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}$, es decir, $x_1=1$, $x_2=3$. Una vez hallados los valores de x, encontramos los valores correspondientes de y por la ecuación $y=-x+6$; para $x_1=1$ tenemos $y_1=5$, para $x_2=3$ tenemos $y_2=3$. De este modo los puntos buscados son (1; 5) y (3; 3).

Ejemplo 2. Dadas las ecuaciones de dos líneas: $x+y=0$ (la bisectriz del segundo ángulo coordenado) y $(x-5)^2+y^2=1$ (una circunferencia), hallar sus puntos de intersección.

Solución. Formamos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} (x-5)^2+y^2=1, \\ x+y=0. \end{array}\right\}$$

Ponemos en la primera ecuación $y=-x$ (de la segunda). Obtenemos: $(x-5)^2+$ $+x^2=1$, o $x^2-5x+12=0$. De aquí que

$$x_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-12}=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{-23}}{2}.$$

Como $\sqrt{-23}$ es un número imaginario, llegamos a la conclusión de que el sistema no tiene soluciones reales y, por lo tanto, las líneas dadas no se cortan.

§ 14. Ecuaciones paramétricas de una línea

45. Supongamos dado un sistema de coordenadas y dos funciones de un argumento t:

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{array}\right\} \tag{1}$$

Convengamos en considerar las cantidades x e y, para cada valor de t, como las coordenadas de un punto M. Al variar t, varían también, por lo general, x e y, y, por tanto, el punto M se desplaza por el plano. *Las igualdades* (1) *se llaman ecuaciones paramétricas de la trayectoria del punto M; el argumento t se llama parámetro variable.*

Las ecuaciones paramétricas desempeñan un papel muy importante en la mecánica, donde se emplean como *ecuaciones del movimiento*. Así pues, si un punto material M se mueve en el plano,

*) Puesto que el sistema (2) se ha deducido del sistema (1), por su parte, el sistema (1) puede ser deducido fácilmente del sistema (2).

en cada instante t tendrá determinadas coordenadas x, y. Las ecuaciones que expresan x e y en función del tiempo t se llaman ecuaciones del movimiento del punto M; éstas son de la forma (1).

En mecánica se dice, que el movimiento de un punto material está dado en forma matemática, si se han dado sus ecuaciones.

46. Supongamos que una línea está determinada mediante sus ecuaciones paramétricas $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ como la trayectoria del punto $M(x; y)$.

Si $F(x, y)=0$ es consecuencia de las ecuaciones dadas, a ella satisfacen las coordenadas $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ del punto M para cualquier t. Es decir, el punto M se moverá por la línea $F(x, y)=0$. Si el punto M recorre toda esta línea, $F(x, y)=0$ representará la ecuación ordinaria de la trayectoria del punto M. El paso de las ecuaciones paramétricas $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ a la ecuación $F(x, y)=0$ se llama *eliminación del parámetro*.

Ejemplo. Las ecuaciones $x=r\cos t$, $y=r\,\mathrm{sen}\,t$ son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio r. En efecto, elevando estas ecuaciones al cuadrado y sumándolas miembro a miembro resulta $x^2+y^2=r^2$. De aquí se ve que el punto $M(x, y)$ se mueve por la circunferencia indicada. Como, además, el parámetro t toma todos los valores numéricos posibles, el rayo OM (que forma con el eje Ox el ángulo t) ocupará todas las posiciones posibles. Por lo tanto, el punto M recorrerá toda la circunferencia (infinitas veces, al crecer indefinidamente t).

47. Sea $\rho=f(\theta)$ la ecuación polar de una línea. Esta misma línea se puede determinar en coordenadas cartesianas mediante las ecuaciones paramétricas

$$x=f(\theta)\cos\theta,$$
$$y=f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Para obtener estas ecuaciones es suficiente sustituir ρ por la función $f(\theta)$ en las fórmulas $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ (véase nº 15).

Ejemplo. Las ecuaciones polares de la espiral de Arquímedes, de la espiral hiperbólica y de la espiral logarítmica son $\rho=a\theta$, $\rho=\frac{a}{\theta}$, $\rho=a^{\theta}$, respectivamente (véase nº 38). De aquí hallamos, en coordenadas cartesianas, las ecuaciones paramétricas; las de la espiral de Arquímedes son:

$$x=a\theta\cos\theta, \qquad y=a\theta\,\mathrm{sen}\,\theta;$$

las de la espiral hiperbólica son:

$$x=\frac{a\cos\theta}{\theta}, \qquad y=\frac{a\,\mathrm{sen}\,\theta}{\theta},$$

y las de la espiral logarítmica son:

$$x=a^{\theta}\cos\theta, \qquad y=a^{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

En todos estos casos se toma por parámetro el ángulo polar θ del punto variable.

§ 15. Líneas algebraicas

48. El objetivo principal de la geometría analítica es el estudio de las líneas definidas por ecuaciones algebraicas respecto a las coordenadas cartesianas rectangulares. Estas son ecuaciones de la forma siguiente:

$$Ax+By+C=0; \tag{1}$$

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0; \tag{2}$$

$$Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+Ex^2+Fxy+Gy^2+$$
$$+Hx+Iy+K=0; \tag{3}$$

. . . .

Aquí A, B, C, D, E, etc. son números fijos, llamados coeficientes de las ecuaciones indicadas.

La ecuación (1) se llama *ecuación general de primer grado* (los valores numéricos de sus coeficientes pueden ser cualesquiera, pero con la condición de que la ecuación verdaderamente contenga términos de primer grado, es decir, que se excluye el caso de que A y B se anulen simultáneamente); la ecuación (2) se llama *ecuación general de segundo grado* (los valores numéricos de sus coeficientes pueden ser cualesquiera, pero con la condición de que la ecuación verdaderamente contenga términos de segundo grado, es decir, que se excluye el caso de que A, B y C sean simultáneamente iguales a cero); la ecuación (3) se llama *ecuación general de tercer grado* (los valores numéricos de sus coeficientes pueden ser cualesquiera, excluyendo el caso de que los cuatro coeficientes A, B, C y D sean iguales a cero). Las ecuaciones de cuarto, quinto, y etc. grados, son de forma análoga. He aquí algunos ejemplos de ecuaciones que no son algebraicas:

$$y-\operatorname{sen}x=0,$$
$$y-\log x=0,$$
$$y-10^x=0,$$
$$10^x-5^y+1=0,$$
$$2^{xy}-x-y=0.$$

La línea que en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares se determina por una ecuación algebraica de grado n, se llama línea algebraica de n-ésimo orden.

49. Teorema 8. *La línea que en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares se determina por una ecuación algebraica de grado n, se determina también en cualquier otro sistema de coordenadas análogas mediante una ecuación algebraica del mismo grado.*

Demostración. Supongamos que una línea está determinada en un sistema de coordenadas, cuyos ejes son Ox y Oy, por una ecuación algebraica de grado n. Al pasar a otro sistema de coordenadas, cuyos ejes sean $O'x'$, $O'y'$.

las coordenadas de todos los puntos del plano se transforman mediante las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha \pm y' \operatorname{sen}\alpha + a, \\ y &= x' \operatorname{sen}\alpha \pm y' \cos\alpha + b, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

en donde los signos ante los segundos términos deben ser elegidos adecuadamente (véase la nota al final del nº 29). Para obtener la ecuación de la misma línea en nuevas coordenadas se deben sustituir en su ecuación los argumentos primitivos por los segundos miembros de las fórmulas (4). El primer miembro de esta ecuación representa una suma de monomios, cada uno de los cuales es un producto de potencias enteras y no negativas de las variables x e y tomadas con un coeficiente determinado. Después de sustituir x e y mediante las fórmulas (4) y, después de abrir paréntesis, obtenemos, en el primer miembro de la ecuación que se transforma, una suma de nuevos monomios, cada uno de los cuales es un producto de potencias enteras y no negativas de las nuevas variables x' e y' tomadas con un coeficiente determinado. Por lo tanto, esta transformación mantiene inalterable el carácter algebraico de la ecuación.

Ahora tenemos que demostrar que el grado de la ecuación también queda inalterable. Esto es casi evidente. En efecto, como las expresiones de los segundos miembros de las fórmulas (4) son de primer grado respecto a x' e y', al sustituir x e y por las mismas y abrir paréntesis, no puede aparecer en el primer miembro de la ecuación que se transforma ningún monomio de grado *) mayor a n respecto a las nuevas variables x', y'.

O sea, el grado de una ecuación algebraica no aumenta después de una transformación cualquiera del tipo indicado. Sin embargo, no está claro de antemano que el grado tampoco puede disminuir (mejor dicho, no vaya a ser que los monomios superiores se simplifiquen). Pero, si al pasar de un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares a otro del mismo tipo disminuye el grado de una ecuación algebraica, al hacer el paso inverso, el grado de la ecuación tiene que aumentar, lo que, como vimos, es imposible. El teorema está demostrado.

El teorema establecido muestra que el carácter algebraico de la ecuación y el orden son propiedades inherentes a la misma línea algebraica, es decir, que no dependen de la elección de los ejes coordenados.

La teoría general de las líneas algebraicas es el objeto de tratados especiales de geometría analítica. En este libro haremos un estudio sistemático solamente de las líneas de primero y segundo orden.

En los párrafos siguientes se establece que las líneas de primer orden son rectas (y sólo rectas).

---

*) Se llama grado de un monomio a la suma de los exponentes de las variables que lo forman.

4.

LINEAS DE PRIMER ORDEN

§ 16. Coeficiente angular

50. Supongamos dado un sistema de coordenadas cartesiano rectangular y una recta. Designemos con la letra α el ángulo que hay que hacer girar el eje Ox para que su dirección coincida con una de las direcciones de la recta; al ángulo le añadiremos el signo más o menos, según que la rotación sea positiva o negativa. *El ángulo α se llama ángulo de inclinación de la recta con el eje Ox.*

Si, después de una rotación del eje Ox, hemos conseguido que su dirección coincida con una de las direcciones de la recta, al efectuar una rotación complementaria en el ángulo $\pm\pi$, o $\pm 2\pi$, o $\pm 3\pi$,

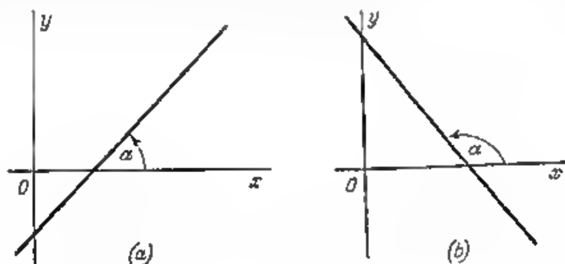


Fig. 35.

etc., etc., obtendremos nuevamente, en cada caso, una de las direcciones de la recta dada. De este modo, el ángulo α puede tener un conjunto infinito de valores diversos, que difieren uno de otro en la cantidad $\pm n\pi$, siendo n un número entero natural. *Se toma frecuentemente por ángulo de inclinación de la recta con el eje Ox, el valor positivo menor del ángulo α* (fig. 35, *a*, 35, *b*) *y, si la*

recta es paralela al eje Ox, el ángulo de inclinación se supone igual a cero.

Es conveniente notar que todos los valores del ángulo de inclinación de una recta con el eje Ox tienen u n a m i s m a t a n g e n t e (puesto que $\operatorname{tg}(\alpha \pm n\pi) = \operatorname{tg}\alpha$).

51. *La tangente del ángulo de inclinación de la recta con el eje Ox se llama coeficiente angular de esta recta.*

Designando el coeficiente angular con la letra k, escribimos esta definición así:

$$k = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (1)$$

Si, en particular, $\alpha = 0$, tendremos que $k = 0$, es decir, el coeficiente angular de una recta paralela al eje Ox es igual a cero. Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tendremos que $k = \operatorname{tg}\alpha$ pierde el sentido aritmético (no puede expresarse con ningún número), es decir, la recta perpendicular al eje Ox carece de coeficiente angular. Suele decirse a menudo que, si la recta es perpendicular al eje Ox, su coeficiente angular «se hace infinito»; con eso se expresa el hecho de que $k \to \infty$ para $\alpha \to \frac{\pi}{2}$.

El coeficiente angular es una característica fundamental de la dirección de la recta y constantemente se emplea en la geometría analítica y sus aplicaciones.

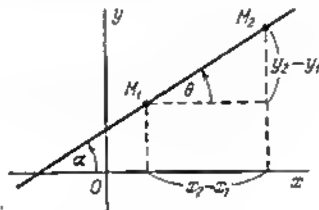


Fig. 36.

52. Consideremos una recta arbitraria; supongamos, sin embargo, que ésta no es perpendicular al eje Ox. Tomemos en ella dos puntos cualesquiera, $M_1(x_1; y_1)$ y $M_2(x_2; y_2)$. El ángulo polar θ del segmento $\overline{M_1M_2}$ es igual al ángulo de inclinación de la recta considerada con el eje Ox y, por lo tanto, la tangente del ángulo θ es igual al coeficiente angular de esta recta (fig. 36); por esto, aplicando la fórmula (6) nº 19, hallamos:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (2)$$

(esta relación se observa fácilmente también de la fig. 36). *Esta fórmula da la expresión del coeficiente angular de la recta mediante dos de sus puntos.*

§ 17. Ecuación de la recta dado su coeficiente angular

53. Supongamos dada una recta, así como antes, pero que no sea perpendicular al eje Ox. *Vamos a deducir la ecuación de esta recta conociendo su coeficiente angular k y la magnitud b del segmento dirigido* $\overline{OB}$, que intercepta en el eje Oy (véase fig. 37).

Designemos el punto variable con la letra M, y sus coordenadas con las letras x, y (o sea, las coordenadas variables); consideremos, además, el punto $B(0, b)$ de intersección de la recta con el eje Oy. Calculemos el segundo miembro de la fórmula (2) nº 52, tomando

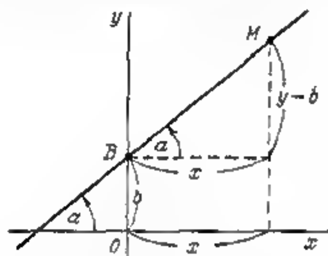


Fig. 37.

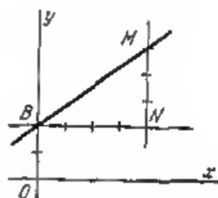


Fig. 38.

por M_1 el punto B, y por M_2, el punto M. Si el punto M está situado en la recta dada, haciendo los cálculos obtenemos el coeficiente angular de esta recta:

$$\frac{y-b}{x}=k; \tag{3}$$

si el punto M no está situado en la recta dada, esta igualdad no subsiste. Por consiguiente, la igualdad (3) es la e c u a c i ó n d e l a r e c t a d a d a (esto se observa también con facilidad en la figura 37, si se tiene en cuenta que $k=\operatorname{tg}\alpha$). Extrayendo el denominador y pasando b al segundo miembro, obtenemos

$$y=kx+b. \tag{4}$$

54. Así pues, *cada recta no perpendicular al eje Ox puede ser determinada por una ecuación de la forma* (4).

Recíprocamente, *toda ecuación de la forma* (4) *determina una recta, cuyo coeficiente angular es k, que intercepta en el eje Oy un segmento de magnitud b.* En efecto, si se da la ecuación $y=kx+b$,

entonces, cualesquiera que sean los números k y b, siempre se puede trazar una recta, cuyo coeficiente angular sea k y que intercepte en el eje Oy un segmento OB de magnitud b; pero, entonces, por lo señalado anteriormente, la recta trazada se determinará por la ecuación dada. *La ecuación de la forma* (4) *se llama ecuación de la recta* con *coeficiente angular* *).

Ejemplo. Trazar la recta cuya ecuación es

$$y=\frac{3}{4}x+2.$$

Solución. Marquemos en el eje Oy el segmento $OB=2$ (fig. 38); tracemos «a la derecha» del punto B un segmento $BN=4$ paralelo al eje Ox, y por el punto N un segmento $NM=3$, en dirección al eje Oy («hacia arriba»). Uniendo luego los puntos B y M, obtenemos la recta buscada (ésta intercepta en el eje Oy un segmento $b=2$ y forma con el eje Ox un ángulo cuya tangente es igual a $^3/_4$).

55. La función

$$y=kx+b$$

se llama *lineal*. Basándonos en lo expuesto podemos afirmar que la *gráfica de la función lineal es una línea recta.*

Para $b=0$, se tiene:

$$y=kx. \tag{5}$$

Las variables x e y ligadas de este modo, se llaman *proporcionales* entre sí; el número k se llama *coeficiente de proporcionalidad*. Por lo expuesto anteriormente, queda claro que la *gráfica de la función $y=kx$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene el coeficiente angular k.*

56. En muchos casos, suele ser necesario hallar la ecuación de la recta conociendo uno de sus puntos $M_1(x_1; y_1)$ y el coeficiente angular k. La ecuación buscada se obtiene inmediatamente de la fórmula (2) nº 52. En efecto, sea M el punto variable y x e y sus coordenadas (variables). Si M está situado en la recta que pasa por el punto M_1 y tiene el coeficiente angular k, por la fórmula (2) nº 52, se tiene

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k; \tag{6}$$

si el punto M no está situado en esta recta, la igualdad (6) no tendrá lugar. De este modo, la igualdad (6) es la ecuación buscada; ésta, por lo general, se escribe en la forma

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{7}$$

Observación. Si, particularmente, se toma por $M_1(x_1; y_1)$ el punto $B(0; b)$, la ecuación (7) toma la forma (4).

*) También se llama ecuación ordinaria de la recta o ecuación de la recta en función del coeficiente angular. (*N* del *T*).

57. Aplicando la relación (7) resulta sencilla la resolución del siguiente problema: hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados $M_1(x_1; y_1)$ y $M_2(x_2; y_2)$.

Empleando la fórmula (2) nº 52, hallamos el coeficiente angular de la recta

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

y, aplicando después la relación (7), obtenemos la ecuación buscada

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Está convenido escribir esta ecuación en la forma siguiente:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (8)$$

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $M_1(3; 1)$ y $M_2(5; 4)$.

Solución. Sustituyendo en la relación (8) las coordenadas por las dadas, se tiene

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3},$$

o sea, $3x-2y-7=0$.

§ 18. Cálculo del ángulo formado por dos rectas. Condiciones de paralelismo y de perpendicularidad de dos rectas

58. Uno de los problemas corrientes de la geometría analítica es el del cálculo del ángulo formado por dos rectas. Aquí deduciremos una fórmula que permite calcular el ángulo de dos rectas, conociendo sus coeficientes angulares (se supone que ninguna de estas rectas es perpendicular al eje Ox).

Consideremos dos rectas; llamemos a una de ellas (a cualquiera) primera, a la otra, segunda (fig. 39). Designemos por k_1 y k_2 los coeficientes angulares correspondientes de estas rectas, por φ *el ángulo de inclinación de la segunda recta a la primera, es decir, el ángulo que tiene que girar la primera recta para que su dirección coincida con una de las direcciones de la segunda recta.* El ángulo φ lo consideraremos positivo o negativo, según que esta rotación sea positiva o negativa. Al hablar del ángulo de dos rectas se supondrá que se trata del ángulo φ.

Supongamos que α_1 es el ángulo de inclinación de la primera recta con el eje Ox. Si hacemos girar el eje Ox en el ángulo α_1, su dirección coincidirá con una de las direcciones de la primera recta; si hacemos girar después el eje Ox en el ángulo φ, se obtendrá una de las direcciones de la segunda recta. Así pues, aumentando al ángulo α_1 el ángulo φ, obtenemos el ángulo de inclinación de la

segunda recta con el eje Ox; designémoslo mediante α_2. Por lo dicho, tenemos que

$$\alpha_1 + \varphi = \alpha_2, \text{ o } \varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

De aquí, que

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Pero $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$; por consiguiente,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (1)$$

Esta es la fórmula que queríamos obtener.

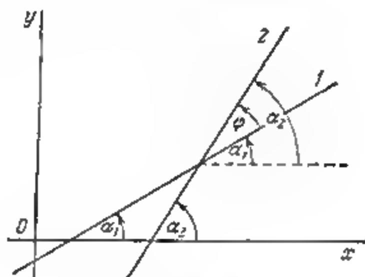


Fig. 39.

Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la tangente del ángulo φ pierde el sentido aritmético («se hace infinita»); en este caso (y sólo en este caso), el denominador del segundo miembro de la fórmula (1) es igual a cero.

Ejemplo. Dadas las rectas $y = -\frac{1}{7}x + 2$, $y = \frac{3}{4}x + 3$, hallar el ángulo formado por ellas.

Solución. Aplicando la fórmula (1) hallamos:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{7}\right)}{1 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)} = \frac{21 + 4}{28 - 3} = 1.$$

Así pues, uno de los ángulos formados por las rectas es igual a 45°.

59. Al resolver diversos problemas de geometría analítica, suele ser importante establecer si dos rectas, cuyas ecuaciones son conocidas, son paralelas o perpendiculares entre sí.

Esta cuestión también se resuelve con facilidad.

Supongamos que se conocen los coeficientes angulares k_1 y k_2 de dos rectas. Designemos con α_1 y α_2 los ángulos de inclinación

correspondientes de estas rectas con el eje Ox. Es evidente que las rectas dadas son paralelas si, y sólo si, sus ángulos de inclinación con el eje Ox tienen valores iguales, es decir, si $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Pero $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$. Llegamos, por lo tanto, a la conclusión de que *la condición de paralelismo de dos rectas es la igualdad de sus coeficientes angulares:*

$$k_2 = k_1.$$

Las rectas dadas son perpendiculares cuando, y sólo cuando, el ángulo φ formado por ellas es igual a $\frac{\pi}{2}$, es decir, cuando $\operatorname{tg}\varphi$ pierde el sentido aritmético; en este caso, el denominador del segundo miembro de la fórmula (1) es igual a cero, o sea, $1 + k_1k_2 = 0$. Por lo tanto, *la condición de perpendicularidad de dos rectas es:*

$$k_1k_2 = -1.$$

Generalmente, la última relación suele escribirse de la forma

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \tag{2}$$

y la condición de perpendicularidad de dos rectas se formula correspondientemente así: *los coeficientes angulares de dos rectas perpendiculares son recíprocos en valor absoluto y de signo contrario.*

Aplicando las reglas establecidas, podemos afirmar inmediatamente, que las rectas $y = \frac{2}{3}x + 1$, $y = \frac{2}{3}x + 5$ son paralelas y que las rectas $y = \frac{3}{4}x + 2$, $y = -\frac{4}{3}x + 3$ son perpendiculares entre sí.

Ejemplo. Hallar la proyección del punto $P(4; 9)$ sobre la recta que pasa por los puntos $A(3; 1)$ y $B(5; 2)$.

Solución. El punto buscado se halla resolviendo simultáneamente la ecuación de la recta AB y la ecuación de la perpendicular bajada desde el punto P a esta recta. Ante todo, hallamos la ecuación de la recta AB; aplicando la relación (8) n° 57, obtenemos:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1},$$

o sea

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Para hallar la ecuación de la perpendicular bajada desde el punto P a la recta AB escribimos la ecuación de una recta arbitraria que pasa por el punto P; por la relación (7) n° 56, se tiene:

$$y - 9 = k(x - 4), \tag{*}$$

en donde k es, por ahora, un coeficiente angular indeterminado. Es necesario que la recta buscada sea perpendicular a la recta AB; por lo tanto, su coeficiente angular tiene que satisfacer a las condiciones de perpendicularidad con la recta AB. Como el coeficiente angular de la recta AB es igual a $\frac{1}{2}$, aplicando la

fórmula (2) hallamos que $k=-2$. Sustituyendo en la ecuación (*) el valor obtenido de k, se tiene:

$$y-9=-2(x-4) \quad \text{o} \quad y=-2x+17.$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},$$

$$y=-2x+17,$$

hallamos las coordenadas de la proyección buscada:

$$x=7, \quad y=3.$$

§ 19. La recta como línea de primer orden. Ecuación general de la recta

60. Demostraremos seguidamente el siguiente teorema fundamental:

Teorema 9. *Toda recta se determina, en coordenadas cartesianas, por una ecuación de primer grado y, recíprocamente, toda ecuación de primer grado determina una recta.*

Demostración. Demostremos, ante todo, la primera parte del teorema. Sea dada una recta arbitraria. Si no es perpendicular al eje Ox, entonces ésta se determina por el nº 53 mediante una ecuación de la forma $y=kx+b$, es decir, mediante una ecuación de primer grado.

Si la recta es perpendicular al eje Ox, las abscisas de todos sus puntos son iguales a la magnitud del segmento que la recta intercepta en el eje Ox (fig. 40); de este modo, si designamos la magnitud de este segmento con la letra a, obtenemos la ecuación de la recta en la forma $x=a$, que también es una ecuación de primer grado. Así pues, cada recta se determina, en coordenadas cartesianas, por una ecuación de primer grado: con esto, la primera parte del teorema queda demostrada.

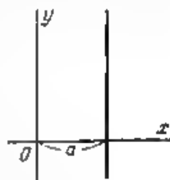


Fig. 40.

Demostremos la afirmación recíproca. Sea dada una ecuación de primer grado

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

con cualesquiera valores numéricos de A, B, C. Si $B \neq 0$, la ecuación dada puede escribirse en la forma:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Designando $-\frac{A}{B}$ por k y $-\frac{C}{B}$ por b, se tiene $y=kx+b$, y esta ecuación, por el nº 53, determina una recta que tiene el coeficiente angular k e intercepta en el eje Oy un segmento de magnitud b.

Si $B=0$, será $A\neq 0$, y la ecuación (1) puede escribirse en la forma

$$x=-\frac{C}{A}.$$

Designando $-\frac{C}{B}$ por a, se tiene $x=a$, es decir, la ecuación de una recta perpendicular al eje Ox. Así pues, cada ecuación de primer grado determina una recta. El teorema queda demostrado.

Como ya se sabe, las líneas que en coordenadas cartesianas se determinan por una ecuación de primer grado se llaman líneas de primer orden (véase nº 48). Empleando esta terminología podemos enunciar el resultado establecido así: *toda recta es una línea de primer orden; toda línea de primer orden es una recta.*

61. La ecuación de la forma $Ax+By+C=0$ se llama *ecuación general de la recta* (por ser una ecuación general de primer grado). Para valores numéricos distintos de A, B, C, esta ecuación puede determinar todas las rectas posibles sin excepción.

§ 20. Ecuación incompleta de primer grado. Ecuación «segmentaria» de la recta

62. Consideremos tres casos particulares en los que la ecuación de primer grado es incompleta.

1) $C=0$; *la ecuación es de la forma $Ax+By=0$, determinando una recta que pasa por el origen de coordenadas.*

En efecto, los números $x=0$, $y=0$ satisfacen a la ecuación $Ax+By=0$. Por lo tanto, el origen de coordenadas pertenece a la recta.

2) $B=0$ ($A\neq 0$); *la ecuación es de la forma $Ax+C=0$, determinando una recta paralela al eje Oy.*

Este caso ya fue estudiado en el nº 60 durante la demostración del teorema 9. Como se señaló entonces, la ecuación $Ax+C=0$ se reduce a la forma

$$x=a,$$

en donde $a=-\frac{C}{A}$. Esta ecuación determina una recta perpendicular al eje Ox, ya que, según esta ecuación, todos los puntos de la recta tienen abscisas iguales ($x=a$) y, por lo tanto, están situados a una misma distancia del eje Oy («a la derecha», si a es un número positivo, y, «a la izquierda», si a es un número negativo); a es la magnitud del segmento que la recta intercepta en el eje Ox (partiendo del origen de coordenadas; véase la fig. 40).

En particular, si $a=0$, *la recta coincide con el eje Oy*. Por lo tanto, *la ecuación*

$$x=0$$

determina el eje de ordenadas.

3) $A=0\,(B\neq 0)$; *la ecuación es de la forma $By+C=0$, determinando una recta paralela al eje Ox.*

Esto se establece de igual modo que en el caso anterior. Obsérvese solamente que, si ponemos $-\frac{C}{B}=b$, la ecuación $By+C=0$ toma la forma:

$$y=b;$$

el número b es común para todos los puntos de la recta «nivel de la posición» (fig. 41) y, a la vez, es la magnitud del segmento que la recta intercepta en el eje Oy (partiendo del origen de coordenadas).

En particular, si $b=0$, *la recta coincide con el eje Ox.* Por lo tanto, *la ecuación*

$$y=0$$

determina el eje de abscisas.

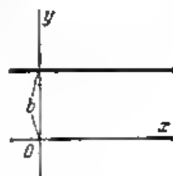


Fig. 41.

63. Consideremos ahora la ecuación

$$Ax+By+C=0,$$

con la condición de que ninguno de los coeficientes A, B, C sea igual a cero. Tal ecuación puede reducirse a una forma especial que suele ser muy útil en una serie de problemas de geometría analítica.

Pasemos el término independiente C al segundo miembro de la ecuación; se tiene:

$$Ax+By=-C.$$

Dividiendo ahora los dos miembros de la ecuación por $-C$, tendremos:

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$$

o sea

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Empleando las notaciones

$$a=-\frac{C}{A}, \quad b=-\frac{C}{B},$$

hallamos:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (1)$$

Esta es la forma especial de la ecuación de la recta que queríamos obtener.

Es conveniente señalar, que los números a y b tienen un significado geométrico sencillo. Precisamente, a y b son las magnitudes de los segmentos que la recta intercepta en los ejes coordenados,

tomado cada uno de ellos desde el origen de coordenadas (fig. 42.) Para convencerse de esto, hallemos los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados. El punto de intersección de la recta con el eje Ox se halla resolviendo simultáneamente la ecuación de esta recta con la ecuación del eje Ox:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=1,\\ y&=0. \end{aligned}\right\}$$

De aquí hallamos que $x=a$, $y=0$. O sea la magnitud del segmento que la recta intercepta en el eje Ox es verdaderamente igual a a. Por analogía se establece que la magnitud del segmento que la recta intercepta en el eje Oy es igual a b.

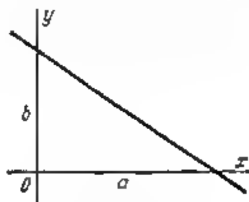


Fig. 42.

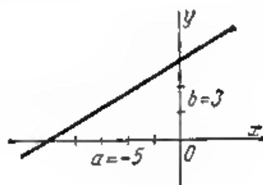


Fig. 43.

La ecuación de la forma (1) suele llamarse *ecuación «segmentaria» de la recta* *). Esta forma de la ecuación resulta, en particular, muy útil para el trazado de la recta en el plano.

Ejemplo. Dada la recta

$$3x-5y+15=0,$$

hallar su ecuación «segmentaria» y trazarla en un plano.

Solución. La ecuación «segmentaria» de esta recta es

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1.$$

Para trazar esta recta en un plano hay que marcar en los ejes coordenados Ox y Oy los segmentos de magnitud $a=-5$ y $b=3$, respectivamente, debiéndose unir después sus extremos (fig. 43).

§ 21. Discusión simultánea de las ecuaciones de dos rectas

64. Sea dado un sistema de dos ecuaciones de primer grado:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

*) La ecuación de la forma (1) también se llama ecuación canónica o simétrica de la recta. (*N* del *T*.)

Cada una de las ecuaciones (1) por separado determina una recta. Cada solución simultánea de estas ecuaciones determina un punto común de las rectas.

Vamos a hacer una discusión del sistema (1) y a dar una interpretación geométrica de los resultados de la misma.

Supongamos que $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. En este caso, el determinante del sistema no es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Por lo tanto, el sistema es compatible y tiene solución única *); de este modo, las rectas determinadas por las ecuaciones del sistema se cortan en un punto; así pues, *estas rectas son diferentes y no son paralelas entre sí*. Las coordenadas de los puntos de intersección se hallan de las ecuaciones (1) mediante las fórmulas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

o

$$x = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \qquad (2)$$

Supongamos ahora que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Existen aquí, a su vez, dos posibilidades: bien $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, bien $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Examinemos la primera de ellas. Designemos con la letra q cada una de las razones iguales $\frac{A_1}{A_2}$ y $\frac{B_1}{B_2}$; entonces, se tiene: $A_1 = A_2q$, $B_1 = B_2q$, $C_1 \neq C_2q$. Multiplicando la segunda de las ecuaciones (1) por q y restándola de la primera ecuación, obtenemos: $C_1 - C_2q = 0$. Esta relación es contradictoria, puesto que $C_1 \neq C_2q$. Sin embargo, ésta se ha deducido del sistema (1); por lo tanto, las ecuaciones del sistema (1) no se convierten simultáneamente en igualdades para ninguno de los valores numéricos de los argumentos x, y, es decir, el sistema (1) es incompatible. En este caso, *las ecuaciones* (1) *determinan rectas que no tienen ningún punto común, o sea, rectas paralelas.*

Veamos la segunda de las dos posibilidades indicadas:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

*) Véase Apéndice, nº 2.

Designando con la letra q cada una de estas razones, hallamos: $A_1 = A_2 q$, $B_1 = B_2 q$, $C_1 = C_2 q$. Por lo tanto, al multiplicar por q el primer miembro de la segunda ecuación, se obtiene el primer miembro de la primera. Así pues, las ecuaciones (1) son equivalentes. Por consiguiente, *las dos ecuaciones* (1) *determinan una misma recta*.

Ejemplos: 1) Las rectas

$$3x + 4y - 1 = 0,$$
$$2x + 3y - 1 = 0$$

se cortan, puesto que $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{3}$. Las coordenadas del punto de intersección son $x = -1$, $y = +1$.

2) Las rectas

$$2x + 3y + 1 = 0,$$
$$4x + 6y + 3 = 0$$

son paralelas, ya que $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{1}{3}$. (Es evidente que el sistema de las ecuaciones dadas es incompatible, pues multiplicando la primera de ellas por 2 y restándola de la segunda, obtenemos una igualdad contradictoria, $1 = 0$.)

3) Las rectas

$$x + y + 1 = 0,$$
$$2x + 2y + 2 = 0$$

coinciden, puesto que las ecuaciones dadas son equivalentes.

Nota. *La relación* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ *se llama condición de paralelismo de las rectas*

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

aunque, como hemos visto, con esta condición las rectas pueden ser paralelas o coincidentes. De este modo, al decir que la relación $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ es la condición de paralelismo de dos rectas, es necesario convenir, que el caso de coincidencia de las rectas se debe considerar como un caso singular (límite) del paralelismo.

65. De los razonamientos anteriores, se deduce directamente la siguiente proposición fundamental:

Dos ecuaciones

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad y \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

determinan una recta cuando, y sólo cuando, sus coeficientes son proporcionales, es decir,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Esta proposición se utilizará a continuación.

§ 22. Ecuación normal de la recta. Cálculo de la distancia de un punto a una recta

66. Aquí estudiaremos un caso de la forma especial de la ecuación de la recta, conocido por el nombre de ecuación normal de la recta.

Dada una recta, tracemos por el origen de coordenadas una recta n perpendicular a ésta, —que la llamaremos *normal* — y designemos con la letra P el punto de intersección de la misma con la recta dada (fig. 44).

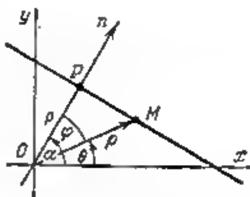


Fig. 44.

Consideraremos como dirección positiva en la normal, la dirección del punto O al punto P (si el punto P coincide con el punto O, es decir, si la recta dada pasa por el origen de coordenadas, la dirección positiva en la normal se elige arbitrariamente). De este modo, la normal es un eje.

Sea α el ángulo medido desde el eje Ox hasta la normal dirigida, y p, la longitud del segmento $\overline{OP}$.

El ángulo α es del mismo carácter que en trigonometría y lo llamaremos ángulo polar de la normal.

Ahora vamos a deducir la ecuación de la recta dada, suponiendo que se conocen los números α y p. Con este fin, tomemos en la recta un punto arbitrario M y designemos sus coordenadas con las letras x, y; es evidente, que la proyección del segmento $\overline{OM}$ sobre la normal es igual a OP, y como la dirección positiva de la normal coincide con la dirección del segmento $\overline{OP}$, la magnitud de este segmento será positiva e igual a p:

$$\text{pr}_n\overline{OM} = p. \tag{1}$$

Busquemos la expresión de la proyección del segmento $\overline{OM}$ sobre la normal mediante las coordenadas del punto M. Con este objeto, designemos por φ el ángulo de inclinación del segmento $\overline{OM}$ con la normal, y por ρ, θ las coordenadas polares del punto M. De acuerdo

con el n° 20, tenemos:

$$\text{pr}_n\overline{OM} = \rho\cos\varphi = \rho\cos(\alpha - \theta) = \rho(\cos\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta) = \\ = (\rho\cos\theta)\cos\alpha + (\rho\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\alpha = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha.$$

Así pues,

$$\text{pr}_n\overline{OM} = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha. \tag{2}$$

De las igualdades (1) y (2) se deduce que $x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha = p$, o

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - p = 0. \tag{3}$$

Esta es la ecuación de la recta dada (como vemos, a esta ecuación satisfacen las coordenadas x, y de cada punto M situado en la recta dada; si el punto M no está situado en la recta dada, sus coordenadas no satisfacen a la ecuación (3), puesto que, entonces, $\text{pr}_n\overline{OM} \neq p$).

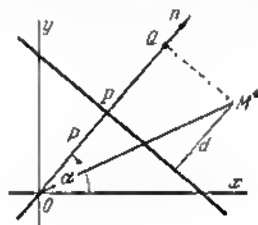


Fig. 45.

La ecuación de la recta escrita en la forma (3) se llama normal; en esta ecuación α es el ángulo polar de la normal y p es la distancia del origen de coordenadas a la recta.

67. Dada una recta arbitraria, tracemos su normal n (tomamos la dirección positiva en la normal tal como está en el n° anterior). Supongamos ahora que M^* es un punto cualquiera del plano y que d es su distancia a la recta dada (fig. 45).

Convengamos en llamar *desviación* *) del punto M^* de la recta dada al número $+d$, si el punto M^* está situado en la parte de la recta adonde va la dirección positiva de la normal y, al número $-d$, si es que el punto M^* está situado al otro lado de la recta. La desviación del punto de la recta la designaremos con la letra δ; así pues: $\delta = \pm d$, y además, es conveniente observar que $\delta = +d$, si el punto M^* y el origen de coordenadas están a diversos lados de la recta, y $\delta = -d$, si el punto M^* y el origen de coordenadas están a un mismo lado de la recta (para los puntos situados en la recta, $\delta = 0$).

*) También se llama distancia dirigida. (*N* del *T.*)

Uno de los problemas más corrientes de la geometría analítica es el del cálculo de la desviación de un punto a una recta. La solución de este problema la da el siguiente teorema:

Teorema 10. *Si las coordenadas del punto M^* son $(x^*; y^*)$, y la ecuación normal de una recta es*

$$x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha - p = 0,$$

a desviación del punto M^* a esta recta está dada por la fórmula

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \operatorname{sen}\alpha - p. \qquad (4)$$

Demostración. Sea Q la proyección del punto M^* sobre la normal (fig. 45). Se tiene:

$$\delta = PQ = OQ - OP,$$

en donde PQ, OQ y OP son las magnitudes de los segmentos dirigidos $\overline{PQ}$, $\overline{OQ}$ y $\overline{OP}$ situados sobre la normal. Pero $OQ = \operatorname{pr}_n \overline{OM}^*$, $OP = p$; por consiguiente,

$$\delta = \operatorname{pr}_n \overline{OM}^* - p. \qquad (5)$$

Aplicando al punto M^* la fórmula (2) n° 66, se tiene:

$$\operatorname{pr}_n \overline{OM}^* = x^* \cos\alpha + y^* \operatorname{sen}\alpha. \qquad (6)$$

De las igualdades (5) y (6) obtenemos:

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \operatorname{sen}\alpha - p.$$

Así pues, el teorema queda demostrado.

Obsérvese ahora que $x^* \cos\alpha + y^* \operatorname{sen}\alpha - p$ no es otra cosa más que el primer miembro de la ecuación normal de la recta dada, en donde las coordenadas variables se han sustituido por las del punto M^*. De este modo, obtenemos la regla siguiente:

Para hallar la desviación de un punto cualquiera M^* de una recta, es necesario sustituir, en el primer miembro de la ecuación normal de esta recta, las coordenadas variables por las coordenadas del punto M^*. El número obtenido será igual a la desviación buscada.

Observación. La distancia del punto a la recta es igual al módulo (valor absoluto) de la desviación de este punto: $d = |\delta|$. Por lo tanto, si se pide hallar la distancia del punto a la recta, será suficiente calcular la desviación, aplicando la regla indicada, y tomar después su módulo.

68. Como hemos visto, el problema del cálculo de la desviación de un punto de una recta se resuelve fácilmente si se da la ecuación normal de la recta. Veremos ahora cómo se puede reducir la ecuación general de la recta a la forma normal. Sea

$$Ax + By + C = 0 \qquad (7)$$

la ecuación general de una recta y

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - p = 0, \qquad (3)$$

su ecuación normal.

Como las ecuaciones (7) y (3) determinan una misma recta, según el nº 65 los coeficientes de estas ecuaciones son proporcionales.

Esto significa que, multiplicando todos los términos de la ecuación (7) por un factor μ, se obtiene una ecuación

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0,$$

que coincide con la ecuación (3), es decir, resulta que

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \operatorname{sen}\alpha, \quad \mu C = -p. \qquad (8)$$

Para hallar el factor μ elevamos al cuadrado las dos primeras igualdades y sumamos los resultados; se tiene:

$$\mu^2 (A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1.$$

De aquí que

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (9)$$

El valor μ por el que hay que multiplicar la ecuación general de la recta para que tome la forma normal se llama *factor normalizador* de esta ecuación. El factor normalizador se determina por la fórmula (9), pero no por completo: su signo queda indeterminado.

Para determinar el signo del factor normalizador aplicamos la tercera de las igualdades (8). Según esta igualdad, μC es un número negativo. Por lo tanto, *el signo del factor normalizador es contrario al signo del término independiente de la ecuación que se normaliza.*

Nota. Si $C = 0$, se puede elegir el signo del factor normalizador así como se desee.

Ejemplo. Dados la recta $3x - 4y + 10 = 0$ y el punto M (4; 3), hallar la desviación del punto M de la recta dada.

Solución. Para aplicar la regla expuesta en el nº 67 es necesario, ante todo, reducir la ecuación dada a la forma normal.

Con este fin, hallamos el factor normalizador

$$\mu = \frac{-1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}.$$

Multiplicando la ecuación dada por μ, obtenemos la ecuación normal buscada:

$$-\frac{1}{5}(3x - 4y + 10) = 0.$$

Sustituyendo las coordenadas del punto M en el primer miembro de esta ecuación resulta

$$\delta = -\frac{1}{5}(3\cdot 4 - 4\cdot 3 + 10) = -2.$$

Así pues, la desviación del punto M de la recta es negativa, y la distancia hasta la misma es $d = 2$.

§ 23. Ecuación de un haz de rectas

69. El conjunto de todas las rectas del plano que pasan por un punto $S(x_0; y_0)$ se llama *haz* de rectas con centro en S. En geometría analítica suele surgir, frecuentemente, la necesidad de hallar la ecuación de una tercera recta perteneciente a un haz, conociendo las ecuaciones de dos rectas del mismo, y estando descrita en cierto modo la dirección de la recta buscada. Los problemas de este tipo pueden resolverse aplicando, por ejemplo, la ecuación (7) nº 56: $y-y_1=k(x-x_1)$, en donde x_1, y_1 deben de sustituirse por las coordenadas x_0, y_0 del centro del haz (el coeficiente angular k se halla en correspondencia con la dirección dada de la recta buscada). En este caso, deben calcularse previamente las coordenadas x_0, y_0 del centro del haz.

La proposición siguiente da la posibilidad de evitar, en casos semejantes, el cálculo de las coordenadas x_0, y_0.

Sean $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ *las ecuaciones de dos rectas que se cortan en un punto S, y sean* α y β *dos números cualesquiera, no simultáneamente iguales a cero, entonces,*

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad (1)$$

es la ecuación de una recta que pasa por el punto S.

D e m o s t r a c i ó n. Verifiquemos, en primer lugar, que la relación (1) es verdaderamente una ecuación. Escribámosla para esto en la forma

$$(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)=0 \qquad (2)$$

y demostremos que las cantidades $\alpha A_1+\beta A_2$ y $\alpha B_1+\beta B_2$ no pueden ser simultáneamente iguales a cero. Supongamos, por el contrario, que $\alpha A_1+\beta A_2=0$ y $\alpha B_1+\beta B_2=0$, pero, entonces, $\frac{A_1}{A_2}=-\frac{\beta}{\alpha}$ y $\frac{B_1}{B_2}=-\frac{\beta}{\alpha}$. Como los números α y β no son simultáneamente iguales a cero, la razón $\frac{\beta}{\alpha}$ no puede ser indeterminada; por lo tanto, de las igualdades anteriores resulta la proporción $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$. No obstante, los coeficientes A_1, B_1 no pueden ser proporcionales a los coeficientes A_2, B_2, puesto que las rectas dadas se cortan (véase nº 64). De este modo, la suposición hecha es falsa. Así pues, las expresiones $\alpha A_1+\beta A_2$ y $\alpha B_1+\beta B_2$ no pueden anularse simultáneamente, lo que significa que la igualdad (2) es una ecuación (en las variables x e y). Es claro *que la ecuación es de primer grado* y, por lo tanto, determina una recta. Queda por demostrar, que esta recta pasa por el punto S. Sean x_0, y_0 las coordenadas del punto S. Como cada una de las rectas dadas pasa por el punto S, se tiene que $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0$ y $A_2x_0+B_2y_0+C_2=0$, y, por lo tanto,

$$\alpha(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+\beta(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0.$$

Vemos, pues, que las coordenadas del punto S satisfacen a la ecuación (1) y, por consiguiente, la recta definida por la ecuación (1) pasa por el punto S, con lo cual nuestra proposición queda demostrada.

Así pues, la ecuación de la forma (1) determina rectas del haz con centro en el punto S para cualesquiera valores de α y β no simultáneamente iguales a cero.

Demostremos ahora que *los números* α *y* β *siempre se pueden elegir de tal modo, que la ecuación* (1) *determine cualquier recta del haz* (previamente asignada) *con centro en* S. Como cada recta del haz con centro en S no sólo se determina por el punto S, sino también por uno de sus puntos, para demostrar la afirmación citada será suficiente verificar, que se pueden elegir los números α y β de tal modo, que la recta determinada por la ecuación (1) pase por cualquier punto $M^*(x^*; y^*)$ previamente asignado.

Pero esto es evidente; en efecto, la recta determinada por la ecuación (1) pasará por el punto M^* si las coordenadas de este punto satisfacen a la ecuación, es decir, si

$$\alpha(A_1x^*+B_1y^*+C_1)+\beta(A_2x^*+B_2y^*+C_2)=0. \qquad (3)$$

Supongamos que el punto M^* no coincide con el punto S (solamente nos hace falta considerar este caso). Entonces, por lo menos, uno de los valores

$$A_1x^*+B_1y^*+C_1, \quad A_2x^*+B_2y^*+C_2$$

es diferente de cero y, por consiguiente, la igualdad (3) no es una identidad, sino una ecuación, precisamente, una ecuación de primer grado con dos incógnitas, α y β. Para hallar estas incógnitas es necesario dar a una de ellas un valor numérico arbitrario y calcular la otra mediante la ecuación; por ejemplo, si A_2x^*+ $+B_2y^*+C_2\neq 0$, se puede tomar α arbitrariamente (pero diferente de cero) y determinar β por la igualdad

$$\beta=-\frac{A_1x^*+B_1y^*+C_1}{A_2x^*+B_2y^*+C_2}\alpha.$$

Así pues, por la ecuación de la forma (1) siempre se puede determinar una recta que pase por cualquier punto del plano previamente asignado y, por lo tanto, cualquier recta del haz con centro en S. Por eso, la ecuación de la forma (1) se llama *ecuación de un haz de rectas (con centro en S)*.

Si $\alpha\neq 0$, suponiendo $\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$, de la ecuación (1) se tiene:

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0. \qquad (4)$$

En las aplicaciones, es más usual esta forma de la ecuación del haz de rectas que la ecuación (1). Sin embargo, es importante observar que, como al pasar de la ecuación (1) a la ecuación (4)

se excluye el caso en que $\alpha=0$, la recta $A_2x+B_2y+C_2=0$ no se puede obtener de la ecuación (4); es decir, para diversos valores de λ, la ecuación (4) determina todas las rectas del haz menos una (menos la segunda de las rectas dadas).

Ejemplo. Dadas dos rectas $2x+3y-5=0$, $7x+15y+1=0$, que se cortan en un punto S, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto S y es perpendicular a la recta $12x-5y-1=0$.

Solución. Comprobemos, ante todo, lo que se afirma en las condiciones del problema: las rectas dadas se cortan en realidad, puesto que $\frac{2}{7} \neq \frac{3}{15}$.
Escribamos ahora la ecuación del haz de rectas con centro en S:

$$2x+3y-5+\lambda(7x+15y+1)=0. \qquad (5)$$

Para hallar en este haz la recta buscada calculamos λ, ateniéndose a las condiciones de perpendicularidad de esta recta con la recta $12x-5y-1=0$. Representando la ecuación (5) en la forma

$$(2+7\lambda)x+(3+15\lambda)y+(-5+\lambda)=0, \qquad (6)$$

hallamos el coeficiente angular de la recta buscada:

$$k=-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}.$$

El coeficiente angular de la recta dada es

$$k_1=\frac{12}{5}.$$

Por las condiciones de perpendicularidad $k=-\frac{1}{k_1}$, es decir,

$$-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}=-\frac{5}{12}.$$

De aquí que $\lambda=-1$. Poniendo en la ecuación (6) $\lambda=-1$, obtenemos, $-5x-12y-6=0$, o sea,

$$5x+12y+6=0.$$

El problema queda resuelto.

5.

PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LAS LINEAS DE SEGUNDO ORDEN

En el presente capítulo estudiaremos tres formas de líneas de segundo orden: la elipse, la hipérbola y la parábola. El principal objeto de este capítulo es hacer conocer las propiedades fundamentales de las líneas indicadas.

§ 24. La elipse. Definición de la elipse y deducción de su ecuación canónica

70. *Se llama elipse al lugar geométrico de puntos, cuya suma de distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es una cantidad constante;* esta constante tiene que ser *mayor que la distancia entre los focos.* Está convenido indicar los focos de la elipse mediante F_1 y F_2.

Nota. Evidentemente, la suma de las distancias de un punto arbitrario M a dos puntos fijos F_1 y F_2 no puede ser menor que la distancia entre estos dos puntos. Esta suma es igual a la distancia entre F_1 y F_2 cuando, y sólo cuando, el punto M está situado en el segmento F_1F_2. Por lo tanto, el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es una cantidad constante e igual a la distancia entre F_1 y F_2, representa simplemente el segmento F_1F_2. La restricción que se hizo al final de la definición excluye precisamente este caso.

71. Sea M un punto arbitrario de la elipse con focos en los puntos F_1 y F_2. Los segmentos F_1M y F_2M (así como las longitudes de estos segmentos) se llaman *radios focales* del punto M. Está convenido designar mediante $2a$ la suma constante de los radios focales de los puntos de la elipse. Así pues, para cualquier punto M de la elipse, se tiene:

$$F_1M + F_2M = 2a. \qquad (1)$$

La distancia F_1F_2 entre los focos se designa con $2c$. Como

$$F_1M + F_2M > F_1F_2,$$

resulta que

$$2a > 2c, \quad \text{es decir,} \quad a > c. \tag{2}$$

De la definición de la elipse se deduce directamente el siguiente método de construcción de la misma mediante un hilo: si los extremos de un hilo no elástico, de longitud $2a$, se atan en los puntos F_1 y F_2 y se estira el hilo con la punta de un lápiz, éste describirá en su movimiento una elipse con focos en los puntos F_1 y F_2, cuya suma de los radios focales será igual a $2a$.

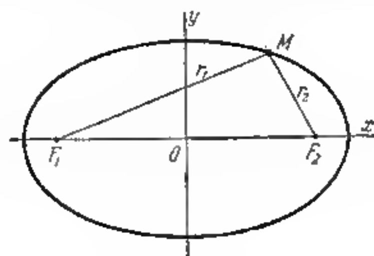


Fig. 46.

Al efectuar la construcción, se puede ver claramente, que la elipse es una línea convexa cerrada (óvalo), simétrica con respecto a la recta F_1F_2 y también con respecto a la recta que pasa por el medio del segmento F_1F_2 y es perpendicular al mismo (fig. 46). Más adelante estableceremos analíticamente la forma de la elipse mediante un estudio de su ecuación; en el siguiente nº se deduce la ecuación de la elipse.

72. Dada una elipse con focos F_1 y F_2 (suponemos, además, que se conocen los valores a y c), tomemos en el plano un sistema cartesiano rectangular de coordenadas, cuyos ejes estarán situados de un modo especial con respecto a esta elipse; por eje de abscisas tomamos la recta F_1F_2, suponiéndola dirigida de F_1 a F_2, el origen de coordenadas lo colocamos en medio del segmento F_1F_2 (fig. 46). Deduzcamos la ecuación de la elipse con respecto al sistema de coordenadas establecido.

Tomemos en el plano un punto arbitrario M y designemos sus coordenadas por x e y. Designemos por r_1 y r_2 las distancias del punto M a los focos ($r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$). El punto M estará situado en la elipse dada cuando, y sólo cuando,

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{3}$$

Para obtener la ecuación buscada es necesario sustituir las variables r_1 y r_2 en la igualdad (3) por sus expresiones mediante las coordenadas x, y.

Obsèrvese que, siendo $F_1F_2=2c$, y como los focos F_1 y F_2 están situados en el eje Ox y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, sus correspondientes coordenadas serán $(-c; 0)$ y $(+c; 0)$; teniendo esto en cuenta y aplicando la fórmula (2) nº 18, hallamos:

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{4}$$

Sustituyendo en la igualdad (3) r_1 y r_2 por las expresiones obtenidas, hallamos:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{5}$$

Esta es la ecuación de la elipse considerada en el sistema de coordenadas elegido, puesto que la satisfacen las coordenadas del punto $M(x; y)$ cuando, y sólo cuando, el punto M está situado en esta elipse. Todos los cálculos ulteriores tienen el objeto de hallar una forma más simple de la ecuación de la elipse.

Despejemos el primer radical de la ecuación (5) y elevemos al cuadrado los dos miembros de la igualdad; se tiene:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2, \tag{6}$$

o sea,

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx. \tag{7}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de esta igualdad hallamos:

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2, \tag{8}$$

de donde,

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \tag{9}$$

Aquí consideraremos una nueva cantidad

$$b=\sqrt{a^2-c^2}; \tag{10}$$

más adelante se verá el sentido geométrico de b; ahora observaremos solamente que $a>c$, y, por lo tanto, $a^2-c^2>0$, o sea, que b es real. De la igualdad (10) se tiene que

$$b^2=a^2-c^2, \tag{11}$$

y, por consecuencia, la ecuación (9) se puede escribir de la forma

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

o sea,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{12}$$

Demostremos que *la ecuación (12) es la ecuación de la elipse dada*. Este hecho no es de por sí evidente, ya que la ecua-

ción (12) se ha obtenido de (5) eliminando dos veces los radicales; solamente es evidente que la ecuación (12) es consecuencia de la ecuación (5). Tenemos que demostrar que, a su vez, la ecuación (5) es consecuencia de la ecuación (12), es decir, que éstas son equivalentes.

Supongamos que x, y son dos números cualquiera que satisfacen a la ecuación (12). Efectuando las operaciones anteriores en el orden inverso, obtendremos de la ecuación (12), primero, la igualdad (9), después, la igualdad (8), que ahora la escribiremos en la forma

$$a^2[(x-c)^2+y^2]=(a^2-cx)^2.$$

Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros de esta igualdad, se tiene:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm(a^2-cx). \qquad (13)$$

Obsérvese que por la igualdad (12), tiene que ser $|x|\leqslant a$. Como $|x|\leqslant a$ y $c<a$, se tiene que $|cx|<a^2$ y, por tanto, el número a^2-cx es positivo. Es por esto, que en el segundo miembro de la igualdad (13) se debe tomar el signo más. De este modo, obtenemos la igualdad (7), después de la cual se obtiene la igualdad (6); esta última la escribimos de la forma

$$(x+c)^2+y^2=[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}]^2.$$

De aquí que

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}). \qquad (14)$$

Estudiemos la cantidad

$$(x-c)^2+y^2=x^2-2cx+c^2+y^2. \qquad (15)$$

Por la igualdad (12) se tiene $x^2\leqslant a^2$. Como $|cx|<a^2$, el número $-2cx$ es en su valor absoluto menor que $2a^2$. Por último, de la igualdad (12) deducimos, que $y^2\leqslant b^2$, o sea, $y^2\leqslant a^2-c^2$, es decir, $c^2+y^2\leqslant a^2$. En vista de esto, toda la suma del segundo miembro de (15) es menor que $4a^2$, y, por consiguiente, la raíz cuadrada de esta suma es menor que $2a$. Por lo tanto, la cantidad que figura entre paréntesis en el segundo miembro de (14) es positiva y, por consiguiente, en la igualdad (14), ante los paréntesis, se debe tomar el signo más. De este modo, obtenemos:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

de donde inmediatamente se deduce la igualdad (5).

Así pues, la ecuación (5) se deduce de la ecuación (12), así como (12) se deduce de la (5). Queda, por lo tanto, demostrado, que la (12) es la ecuación de la elipse dada, puesto que es equivalente a la (5).

La (12) se llama ecuación *canónica* de la elipse.

73. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

que determina una elipse en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, es una ecuación de segundo grado; por lo tanto, *la elipse es una línea de segundo orden.*

§ 25. Análisis de la forma de la elipse

74. En el nº 71 se describió la forma de la elipse por razonamientos geométricos. Aquí estudiaremos la forma de la elipse mediante un análisis de su ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Es preciso subrayar, ante todo, la particularidad algebraica de la ecuación (1): *ésta contiene solamente potencias pares de las coordenadas variables.*

A esta particularidad algebraica de la ecuación indicada (1) corresponde una particularidad geométrica de la línea determinada por la misma a saber: *la elipse determinada por la ecuación* (1) *es simétrica con respecto al eje Ox y con respecto al eje Oy.*

En efecto, si $M(x; y)$ es un punto de esta elipse, o sea, si los números x, y satisfacen a la ecuación (1), los números x, $-y$ también satisfacen a la ecuación (1); por lo tanto, el punto $M'(x; -y)$ también estará situado en esta elipse. Pero el punto $M'(x; -y)$ es simétrico al punto $M(x; y)$ con respecto al eje Ox. Así pues, todos los puntos de la elipse están situados a pares, que son simétricos con respecto al eje Ox. Mejor dicho, si doblamos la figura por el eje Ox, la parte superior de la elipse vendrá a coincidir con la parte inferior. Esto quiere decir que la elipse es simétrica con respecto al eje Ox.

La simetría de la elipse considerada con respecto al eje Oy se demuestra de modo análogo (pues, si los números x, y satisfacen a la ecuación (1), a ésta satisfacen también los números $-x$, y).

Para analizar la forma de la elipse, expresemos en la ecuación (1) la cantidad y en función de x:

$$y=\pm\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

o sea,

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{2}$$

Como la elipse es simétrica con respecto a cada uno de los ejes coordenados, es suficiente considerar solamente aquella parte que está situada en el primer cuadrante coordenado.

Como la parte indicada de la elipse está situada en el semiplano superior, a ella le corresponde el signo + en el segundo miembro de la ecuación (2); y como la misma está situada a la vez en el semiplano derecho, para todos sus puntos será $x \geqslant 0$. Así pues, tenemos que representar la gráfica de la función

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \tag{3}$$

con la condición de que $x \geqslant 0$.

Tomemos en primer lugar $x = 0$, entonces $y = b$. El punto $B(0; b)$ es el punto que está más a la izquierda de la gráfica considerada. Supongamos ahora que x va creciendo desde cero. Es evidente que, al crecer x, la expresión bajo el radical de la fórmula (3) irá disminuyendo; por consiguiente, a la vez, irá disminuyendo la cantidad y. De este modo, el punto variable $M(x; y)$, que describe la

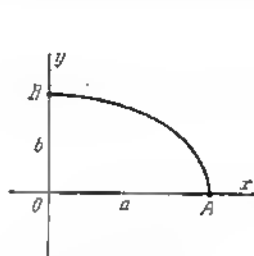


Fig. 47.

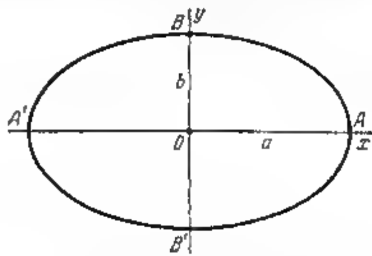


Fig. 48.

gráfica considerada se mueve para la derecha y hacia abajo (fig. 47). Cuando x tome el valor de a tendremos que $y = 0$; entonces, el punto $M(x; y)$ coincidirá con el punto $A(a; 0)$ que está situado en el eje Ox. Durante el crecimiento sucesivo de x, es decir, para $x > a$, la expresión subradical de la fórmula (3) se hace negativa y, por lo tanto, y es imaginaria. De esto se deduce, que el punto A es el punto que está situado más a la derecha de la gráfica. O sea, la parte de la elipse situada en el primer cuadrante coordenado es un arco BA, cuya representación se da en la fig. 47.

Haciendo trazados simétricos del arco BA con respecto a los ejes coordenados se obtiene toda la elipse; ésta tiene la forma de un óvalo convexo con dos ejes de simetría perpendiculares entre si (fig. 48).

Generalmente, los ejes de simetría de la elipse se llaman simplemente *ejes*, y el punto de intersección de éstos, *centro* de la elipse. Los puntos, en los que la elipse se corta con sus ejes, se llaman *vértices*. En la fig. 48 los vértices de la elipse son los

puntos A, A', B y B'. Advirtamos que también se llaman ejes de la elipse a los segmentos $AA'=2a$ y $BB'=2b$. Si la elipse está situada con respecto a los ejes coordenados como se describió en el nº 72, o sea, si sus focos están situados en el eje Ox, tendremos que $b=\sqrt{a^2-c^2}$, y, por lo tanto, $a>b$.

En este caso, el segmento $OA=a$ se llama *semieje mayor* de la elipse, y el segmento $OB=b$, *semieje menor*. Está fuera de dudas que la elipse determinada por la ecuación (1) puede estar situada de tal modo, que sus focos estén en el eje Oy; entonces, $b>a$ y su semieje mayor será el segmento $OB=b$. Pero, en todo caso, la longitud del segmento OA del eje de abscisas se designa por a, y la longitud del segmento OB del eje de ordenadas se indica por b.

Nota. En la fig. 47, la parte de la elipse situada en el primer cuadrante coordenado está representada en forma de un arco BA, que en todos los sitios es convexo «hacia arriba»; además, en la fig. 47 está indicado que la dirección de este arco en el punto B es perpendicular al eje Oy, y en el punto A es perpendicular al eje Ox (por lo cual, la elipse completa no tiene cúspides ni angulosidad en los vértices). Sin embargo, no hemos demostrado que el arco BA posee verdaderamente estas propiedades. Pero aquí no vamos a ocuparnos de esto, pues el estudio de tales gráficas es más natural hacerlo aplicando los métodos del análisis matemático.

75. En el caso particular, $b=a$, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

es de la forma

$$x^2+y^2=a^2;$$

esta ecuación determina una circunferencia de radio a (con centro en el origen de coordenadas). De acuerdo a esto, la circunferencia se considera como un caso particular de la elipse.

§ 26. Excentricidad de la elipse

76. *Se llama excentricidad de la elipse a la razón de la distancia entre sus focos a la longitud de su eje mayor*; designando la excentricidad con la letra ε se tiene

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Como $c<a$, resulta, $\varepsilon<1$, es decir, *la excentricidad de cada elipse es menor que la unidad.*

Obsérvese que $c^2=a^2-b^2$; por tanto,

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

y de aquí,

$$\varepsilon=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{y} \quad \frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Por consiguiente, la excentricidad se determina por la razón de los ejes de la elipse, y, por su parte, la razón de los ejes se determina por la excentricidad. Así pues, *la excentricidad caracteriza la forma de la elipse*. Cuanto más aproximada sea la excentricidad a la unidad, tanto menor será $1-\varepsilon^2$, y, por consiguiente, tanto menor será la razon $\frac{b}{a}$; o sea, *cuanto mayor sea la excentricidad, tanto más alargada será la elipse*. En el caso de la circunferencia, $b=a$ y $\varepsilon=0$.

§ 27. Expresiones racionales de los radios focales de la elipse

77. Consideremos un punto arbitrario $M(x; y)$ situado en la elipse dada. Si r_1 y r_2 son los radios focales de este punto, se tiene

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{1}$$

Resulta que se pueden indicar otras fórmulas sin irracionalidades para las expresiones de los radios focales.

En efecto, por la igualdad (7) nº 72, tenemos:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x.$$

Poniendo aquí $\frac{c}{a}=\varepsilon$ y teniendo en cuenta la segunda de las fórmulas (1), hallamos:

$$r_2=a-\varepsilon x.$$

Según la definición de la elipse, $r_1+r_2=2a$; por esto y por lo anterior,

$$r_1=a+\varepsilon x.$$

Así pues, se verifican las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} r_1&=a+\varepsilon x,\\ r_2&=a-\varepsilon x. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Estas fórmulas serán usadas en el § 34.

§ 28. Construcción de la elipse por puntos. Ecuaciones paramétricas de la elipse

78. Sea dada una elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Tracemos dos circunferencias con un centro común al de la elipse, una de radio a y otra de radio b (se supone que $a > b$); tracemos por el centro de la elipse un rayo arbitrario y designemos con la letra t el ángulo polar de este rayo (fig. 49). El rayo trazado cortará a la circunferencia mayor en un punto P y a la menor en un punto Q. Tracemos después por el punto P una recta paralela al eje Oy y por el punto Q una recta paralela al eje Ox; sea M el punto de intersección de estas rectas, y P_1 y Q_1, las proyecciones de los puntos P y Q sobre el eje de abscisas.

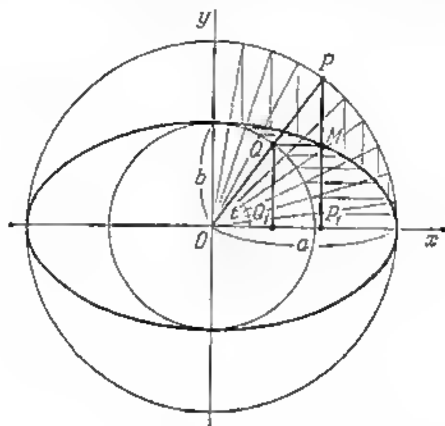


Fig. 49.

Hallemos las expresiones de las coordenadas del punto M mediante t. Como se ve en la fig. 49,

$$x = OP_1 = OP \cdot \cos t = a \cos t,$$
$$y = P_1M = Q_1Q = OQ \cdot \operatorname{sen} t = b \operatorname{sen} t.$$

Por lo tanto,

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \operatorname{sen} t. \end{aligned} \right\} \qquad (2)$$

Sustituyendo estas coordenadas en la ecuación (1), vemos que éstas satisfacen a la ecuación para cualquier t. Por consiguiente, el punto M está situado en la elipse dada. Así pues, hemos indicado cómo se traza un punto de la elipse. Trazando una serie de rayos y efectuando la construcción señalada para cada uno de ellos sucesivamente, podemos trazar tantos puntos de la elipse cuantos queramos. Este método se emplea frecuentemente en el dibujo

(uniendo los puntos hallados con una plantilla de curvas se puede obtener una representación de la elipse bastante exacta, desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas).

79. Las ecuaciones (2) dan las expresiones de las coordenadas de un punto arbitrario de la elipse en función del parámetro variable t; de este modo, **las ecuaciones (2) representan las ecuaciones paramétricas de la elipse** (véase § 14).

§ 29. La elipse como proyección de la circunferencia sobre un plano. La elipse como sección de un cilindro circular

80. Demostraremos seguidamente *que la proyección de una circunferencia sobre un plano arbitrario es una elipse.*

Supongamos que la circunferencia k, situada en el plano β, se proyecta sobre un plano α. Designemos por k' el lugar geométrico de las proyecciones de todos los puntos de la circunferencia k; hay que demostrar que k' es una elipse. Para facilitar la discusión vamos a suponer que el plano α pasa por el centro de la circunferencia k (fig. 50). Introduzcamos en el plano α un sistema de coordenadas cartesiano rectangular, tomando por eje Ox la recta de intersección de los planos α y β, y por origen de coordenadas,

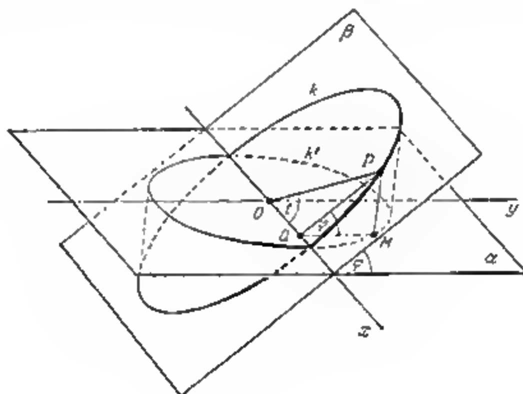


Fig. 50.

el centro de la circunferencia k. Designemos por a el radio de la circunferencia k y por φ el ángulo agudo formado por los planos α y β. Sea P un punto arbitrario de la circunferencia k; designemos por M su proyección sobre el plano α, por Q, su proyección sobre el eje Ox y por t, el ángulo que forma el segmento OP con

el eje Ox. Hallemos las expresiones de las coordenadas del punto M mediante t. En la fig. 50 se ve fácilmente que

$$x = OQ = OP \cdot \cos t = a \cos t,$$

$$y = QM = QP \cdot \cos \varphi = OP \cdot \operatorname{sen} t \cos \varphi = a \cos \varphi \operatorname{sen} t.$$

Designando con la letra b la cantidad constante $a \cos \varphi$, se tiene:

$$x = a \cos t,$$
$$y = b \operatorname{sen} t.$$

Estas ecuaciones coinciden justamente con las ecuaciones paramétricas de la elipse (véase n° 78); por lo tanto, la línea k' es una elipse (con el semieje mayor a y con el semieje menor $b = a \cos \varphi$).

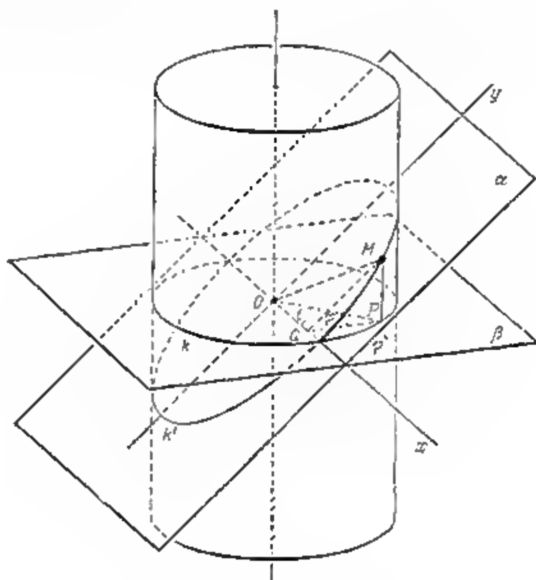


Fig. 51.

81. Es fácil demostrar también, que *toda sección de un cilindro circular por un plano no paralelo a su eje es una elipse.*

Para demostrar esto, consideremos algún cilindro circular y un plano secante α (fig. 51); designemos por k' la línea obtenida en la sección. Sea O el punto de intersección del eje del cilindro con

el plano α; tracemos por el punto O un plano β perpendicular al eje. La intersección de este plano con el cilindro es una circunferencia k. Designemos con a el radio de esta circunferencia y con φ, el ángulo agudo formado por los planos α y β. Elijamos ahora los ejes coordenados en el plano α tal como están representados en la figura 51. Tomemos en la linea k' un punto arbitrario M; designemos con P su proyección sobre el plano β, con Q, su proyección sobre el eje Ox, y con t, el ángulo formado por el segmento OP y el eje Ox. Expresando mediante t las coordenadas del punto M, se tiene:

$$x = OQ = OP \cdot \cos t = a \cos t,$$
$$y = QM = \frac{QP}{\cos\varphi} = \frac{OP \cdot \operatorname{sen} t}{\cos\varphi} = \frac{a}{\cos\varphi} \operatorname{sen} t.$$

Poniendo $\frac{a}{\cos\varphi} = b$, se tiene:

$$x = a \cos t,$$
$$y = b \operatorname{sen} t.$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de una elipse; así pues, la linea k' es una elipse, como se quería demostrar.

Obsérvese que $\frac{a}{\cos\varphi} > a$; por lo tanto, a es el eje menor de la elipse k', $b = \frac{a}{\cos\varphi}$ es su eje mayor, es decir, la elipse k' está alargada en dirección del eje Oy.

El hecho de que la elipse es una sección plana de un cilindro circular y de que también es la proyección de una circunferencia sobre un plano, permite tener una idea inmediata de esta linea.

§ 30. La hipérbola. Definición de la hipérbola y deducción de su ecuación canónica

82. *Se llama hipérbola al lugar geométrico de puntos, cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es una cantidad constante*; la diferencia indicada se toma en su *valor absoluto*; además, ésta tiene que ser *menor que la distancia entre los focos y diferente de cero*. Está convenido designar los focos de la hipérbola mediante F_1 y F_2, y la distancia entre ellos, mediante $2c$.

Nota. Es evidente que la diferencia de las distancias de un punto arbitrario M a dos puntos fijos, F_1 y F_2, no puede ser mayor que la distancia entre los puntos F_1 y F_2. Esta diferencia es igual a la distancia entre F_1 y F_2 cuando, y sólo cuando, el punto M está situado en una de las continuaciones del segmento F_1F_2. Por lo tanto, el lugar geométrico de puntos, cuya diferencia

de distancias a dos puntos fijos, F_1 y F_2, es una cantidad constante, igual a la distancia entre F_1 y F_2 representa las dos continuaciones del segmento F_1F_2 (fig. 52).

Si la diferencia de las distancias de un punto M a los puntos F_1 y F_2 es igual a cero, éste punto equidista de los puntos F_1



Fig. 52.

y F_2. Por lo tanto, el lugar geométrico de aquellos puntos en que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, F_1 y F_2, es una cantidad constante, igual a cero, representa una recta perpendicular al segmento F_1F_2 en su punto medio (fig. 53).

La suposición hecha al final de la definición anterior *excluye los casos indicados*.

83. Sea M un punto arbitrario de la hipérbola con los focos F_1 y F_2 (fig. 54). Los segmentos F_1M y F_2M (así como las longitudes de estos segmentos) se llaman *radios focales* del punto M y se designan por r_1 y r_2 ($F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$). Según la definición de la hipérbola, la diferencia de los radios focales de sus puntos M es una cantidad constante (es decir, al cambiar la posición del

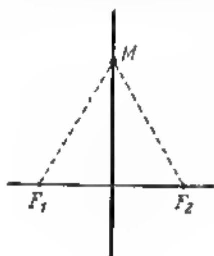


Fig. 53.

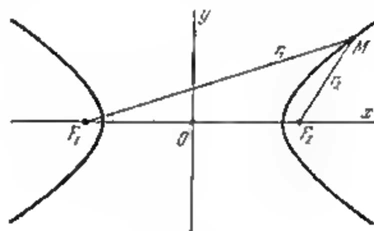


Fig. 54.

punto M en la hipérbola, la diferencia de sus radios focales no se altera) ;está convenido designar esta constante mediante $2a$. De este modo, para cualquier punto M de la hipérbola, se tiene que

$$F_1M - F_2M = 2a, \quad (1)$$

si el punto M está más cerca del foco F_2, y

$$F_2M - F_1M = 2a, \quad (2)$$

si el punto M está más cerca del foco F_1.

Como por la definición de la hipérbola $F_1M - F_2M < F_1F_2$ y $F_2M - F_1M < F_1F_2$, se tiene, $2a < 2c$, es decir,

$$a < c. \qquad (3)$$

A continuación deduciremos la ecuación de la hipérbola para luego establecer su forma analizando la ecuación. Veremos que la hipérbola se compone de dos partes separadas, llamadas ramas, cada una de las cuales se extiende indefinidamente en dos direcciones; la hipérbola entera es simétrica con respecto a la recta F_1F_2, y también con respecto a la recta que es perpendicular al segmento F_1F_2 y pasa por su punto medio (véase la fig. 54).

84. Sea dada una hipérbola con los focos F_1, F_2 (se supone que se conocen los valores a y c). Introduzcamos en el plano un sistema de coordenadas cartesiano rectangular, cuyos ejes los situaremos de un modo especial con respecto a esta hipérbola; a saber: por eje de abscisas tomamos la recta F_1F_2, suponiéndole dirigido de F_1 a F_2, el origen de coordenadas lo colocamos en medio del segmento F_1F_2 (fig. 54).

Deduzcamos la ecuación de la hipérbola en el sistema de coordenadas establecido. Tomemos en el plano un punto arbitrario M y designemos sus coordenadas mediante x e y, y los radios focales F_1M y F_2M, mediante r_1 y r_2. El punto M estará situado en la hipérbola (dada) si, y sólo si, $r_1 - r_2 = 2a$, o si $r_2 - r_1 = 2a$. Asociamos las dos igualdades mediante una inscripción común:

$$r_1 - r_2 = \pm 2a. \qquad (4)$$

Para obtener la ecuación buscada de la hipérbola es necesario sustituir en la igualdad (4) las variables r_1 y r_2 por sus expresiones, mediante las coordenadas variables x, y. Como $F_1F_2 = 2c$ y como los focos F_1, F_2 están situados en el eje Ox y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, éstos tienen las coordenadas $(-c; 0)$ y $(+c; 0)$, respectivamente; teniendo en cuenta esto y aplicando la fórmula (2) n° 18, hallamos:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \qquad (5)$$

Sustituyendo r_1 y r_2 en la igualdad (4) por las expresiones obtenidas, se tiene:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \qquad (6)$$

Esta es la ecuación de la hipérbola considerada en el sistema de coordenadas elegido, puesto que a ella satisfacen las coordenadas del punto $M(x; y)$ si, y sólo si, el punto M está situado en la hipérbola dada (en realidad tenemos aquí dos ecuaciones, una para la rama derecha y otra para la rama izquierda de la hipérbola).

Las transformaciones ulteriores tendrán el objeto de obtener una forma más simple de la ecuación de la hipérbola. Despejamos

el primer radical en la ecuación (6), después de lo cual elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad; se tiene,

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2, \qquad (7)$$

o sea,

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (8)$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de esta igualdad obtenemos:

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2, \qquad (9)$$

de donde

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2). \qquad (10)$$

Consideremos ahora una cantidad nueva

$$b=\sqrt{c^2-a^2}; \qquad (11)$$

más adelante se estudiará el significado geométrico de la cantidad b; obsérvese ahora solamente, que $c>a$ (véase nº 83), por consiguiente, $c^2-a^2>0$, y la cantidad b es real. Por la igualdad (11), se tiene:

$$b^2=c^2-a^2,$$

y, por lo tanto, la igualdad (10) se puede representar de la forma

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

o sea

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (12)$$

Demostremos que *la ecuación* (12) *es la ecuación de la hipérbola dada*. Esto no es evidente, puesto que la ecuación (12) se ha obtenido de la ecuación (6) después de haber eliminado dos veces los radicales; solamente es evidente, que la ecuación (12) es consecuencia de la ecuación (6).

Tenemos que demostrar que la ecuación (6) es, a su vez, consecuencia de la ecuación (12), es decir, que estas ecuaciones son equivalentes.

Supongamos que x, y son dos números que satisfacen a la igualdad (12). Efectuando los cálculos anteriores en orden inverso, partiendo de la igualdad (12), obtendremos, primero la igualdad (10) y, después, la igualdad (9), que la escribiremos ahora del siguiente modo:

$$(cx-a^2)^2=a^2\{(x-c)^2+y^2\}.$$

Extrayendo la raíz de los dos miembros de esta igualdad, se tiene:

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (13)$$

Si el punto (x, y) está situado en el semiplano izquierdo, se tiene $x<0$ y el primer miembro de la igualdad (13) es negativo.

Por lo tanto, en este caso, el segundo miembro de la igualdad (13) se debe tomar con signo menos. Si el punto (x, y) está situado en el semiplano derecho, tendremos $x > 0$; según la ecuación (12), se tiene, $x \geqslant a$. Como $c > a$, será $cx > a^2$, y por consiguiente, el primer miembro de la igualdad (13) es positivo; en este caso, el segundo miembro se debe tomar con signo más. Así pues, la igualdad (13) tiene el mismo significado que la igualdad (8). Efectuando las operaciones necesarias se obtiene la igualdad (7) de la (8); la igualdad obtenida la escribimos del siguiente modo:

$$(x+c)^2+y^2=[\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a]^2.$$

De aquí que

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm(\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a). \qquad (14)$$

Veamos qué signo se debe poner ante los paréntesis en el segundo miembro de esta igualdad. Consideremos dos casos.

1) El punto (x, y) está situado en el semiplano derecho; entonces, por lo dicho anteriormente, dentro de los paréntesis se debe poner el signo más y toda la cantidad que está encerrada entre paréntesis será positiva, o sea, ante los paréntesis se debe poner el signo más.

2) El punto (x, y) está situado en el semiplano izquierdo. En este caso, el número x es negativo y el valor absoluto de la diferencia $x-c$ es igual a la suma $|x|+c$. Por la ecuación (12), se tiene, $|x| \geqslant a$; además, $c > a$. Por consiguiente, $(x-c)^2 > 4a^2$; la suma $(x-c)^2+y^2$ también será mayor que $4a^2$; la raíz de esta suma será mayor que $2a$ y toda la cantidad encerrada entre paréntesis en el segundo miembro de la igualdad (14) será de nuevo positiva. Así pues, también en este caso se debe poner el signo más ante los paréntesis en la igualdad (14). Vemos pues, que para cualquier posición del punto (x, y), la igualdad (14) se reduce a la forma

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a,$$

de donde inmediatamente se obtiene la igualdad (6).

En conclusión, la ecuación (6) se deduce de la ecuación (12), así como la (12) se deduce de la (6). Por lo tanto, queda demostrado que la ecuación (12) es la ecuación de la hipérbola dada, puesto que es equivalente a la ecuación (6).

La ecuación (12) se llama *ecuación canónica de la hipérbola*.

85. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

que determina una hipérbola respecto a un sistema de coordenadas cartesiano rectangular, es una ecuación de segundo grado; por consiguiente, *la hipérbola es una línea de segundo orden*.

§ 31. Análisis de la forma de la hipérbola

86. Ocupémonos del estudio de la hipérbola determinada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \quad (1)$$

Expresemos y, de la ecuación (1), como función de x:

$$y=\pm\sqrt{b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}$$

o sea,

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \quad (2)$$

Como la ecuación (1) solamente contiene términos de potencia par cada una de las coordenadas variables x, y, la hipérbola que ella determina es simétrica respecto a cada uno de los ejes coordenados (se demuestra del mismo modo que en el caso semejante de la elipse; véase n° 74); está claro que es suficiente considerar solamente la parte de la hipérbola que está situada en el primer cuadrante coordenado.

Como la parte indicada de la hipérbola está situada en el semiplano superior, su signo correspondiente en la ecuación (2) es $+$; y como está situada a la vez en el semiplano derecho, para todos sus puntos será $x\geqslant 0$. De este modo, tenemos que analizar la función

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \quad (3)$$

con la condición de que $x\geqslant 0$, y representar su gráfica.

Tomemos en primer lugar $x=0$. Sustituyendo $x=0$ en el segundo miembro de la fórmula (3), hallamos $y=\frac{b}{a}\sqrt{-a^2}$; hemos obtenido un número imaginario. Al crecer x, la cantidad y seguirá siendo imaginaria, mientras que x no tome el valor de a. Poniendo $x=a$ en el segundo miembro de la fórmula (3), hallamos $y=0$. Por consiguiente, el punto $A(a;\ 0)$ es el que está situado más a la izquierda de la gráfica. Al continuar creciendo x, la cantidad y se hace real y positiva; esto se ve inmediatamente de la fórmula (3), puesto que para $x>a$, se tiene $x^2-a^2>0$. De la fórmula (3) se ve también que y es una función creciente de x (si $x\geqslant a$), es decir, que siempre que crece x, crece también y. Finalmente, de la fórmula (3) se ve que al crecer indefinidamente x, crece también indefinidamente y (para $x\to+\infty$, también $y\to+\infty$). Resumiendo, llegamos a la siguiente conclusión: al crecer x, partiendo de $x=a$, el punto variable $M(x,\ y)$ que describe la gráfica se mueve siempre «hacia la derecha» y «hacia arriba», teniendo como posición inicial el punto $A(a;\ 0)$; el alejamiento del punto M tanto «hacia la de-

recha» del eje Oy, como «hacia arriba» del eje Ox es infinito (fig. 55).

87. Analicemos más detenidamente cómo el punto M «se aleja al infinito».

Con este fin, además de la ecuación

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \qquad (4)$$

que para $x \geqslant a$ determina la parte de la hipérbola que estudiamos, consideraremos también la ecuación

$$y=+\frac{b}{a}x, \qquad (5)$$

que representa una recta que pasa por el origen de coordenadas, cuyo coeficiente angular es $k=\frac{b}{a}$. En la fig. 55 está representada

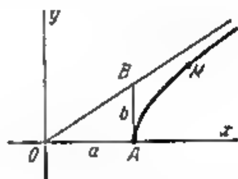


Fig. 55.

la parte de esta recta situada en el primer cuadrante coordenado (para su construcción se ha utilizado el triángulo rectángulo OAB, cuyos catetos son: $OA=a$ y $AB=b$; es evidente que la recta OB tiene, precisamente, el coeficiente angular $k=\frac{b}{a}$).

Demostraremos que, *alejándose al infinito, el punto M se aproxima indefinidamente a la recta $y=\frac{b}{a}x$.*

Tomemos un valor arbitrario de x $(x \geqslant a)$ y consideremos dos puntos: $M(x;\ y)$ y $N(x;\ Y)$; en donde

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

$$Y=\frac{b}{a}x.$$

El punto $M(x;\ y)$ está situado en la hipérbola (4), el punto $N(x;\ Y)$, en la recta (5); como estos dos puntos tienen una misma abscisa x, la recta que une los puntos M y N es perpendicular al eje Ox (fig. 56). Calculemos la longitud del segmento MN.

Observemos, ante todo, que

$$Y = +\frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > +\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} = y. \qquad (6)$$

De aquí que $Y > y$, y, por consiguiente, $MN = Y - y$. Pero

$$Y - y = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{(x^2-a^2)}\right) = \frac{b}{a}\,\frac{(x-\sqrt{(x^2-a^2)})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

es decir,

$$Y - y = \frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}. \qquad (7)$$

Hagamos un análisis de la expresión obtenida, suponiendo que $x \to +\infty$. Su denominador representa una suma de dos sumandos positivos que crecen indefinidamente; por lo tanto, el denominador tiende al infinito (positivo) para $x \to +\infty$. El numerador de esta expresión es la cantidad constante ab. Como consecuencia de estos dos razonamientos, deducimos que el segundo miembro de la igualdad (7) tiende a cero para $x \to +\infty$; por consiguiente, también tiende a cero $MN = Y - y$.

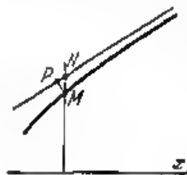


Fig. 56.

Indiquemos mediante P el pie de la perpendicular bajada desde el punto M a la recta $y = \frac{b}{a}x$ (MP es la distancia desde el punto M a esta recta). Es evidente que $MP < MN$, y como $MN \to 0$, también $MP \to 0$. Esto es lo que se quería demostrar.

Así pues, *si el punto variable M tiende al infinito por la parte de la hipérbola* (1) *situada en el primer cuadrante coordenado, la distancia del punto M a la recta $y = \frac{b}{a}x$ tiende a cero.*

88. Sea G *una línea cualquiera*; sea M un punto variable de ella y a una recta. Si es posible un movimiento del punto M por la línea G, de tal modo que: 1) el punto M se aleje al infinito; 2) la distancia del punto M a la recta a tienda a cero, entonces, se dice *que la línea G se aproxima de un modo asintótico a la recta a*. En este caso, la recta a se llama *asíntota* de la línea G.

Empleando la terminología indicada podemos formular el resultado del análisis hecho en el nº 87 del modo siguiente.

La *gráfica de la función $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$* (o sea, la parte considerada de la hipérbola) *se aproxima de manera asintótica a la recta $y = \frac{b}{a}x$ para $x \to +\infty$; es decir, que la recta $y = \frac{b}{a}x$ es asíntota de la gráfica de la función $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$* (y, a la vez, es asíntota de nuestra hipérbola).

89. Seguidamente señalaremos algunas particularidades complementarias sobre la situación de la hipérbola respecto a sus asíntotas (teniendo siempre en cuenta solamente la parte de la hipérbola situada en el primer cuadrante coordenado).

Consideremos de nuevo los puntos $M(x; y)$ y $N(x; Y)$ tratados en el nº 87 y recordemos que el punto M está situado en la hipérbola y, el punto N, en la asíntota. Como ha sido establecido en el nº 37 se verifica la desigualdad, $Y > y$. De esto se deduce, que el punto M siempre está «más abajo» que el punto N. Mejor dicho, *la parte de la hipérbola* (I) *situada en el primer cuadrante coordenado, está situada en toda su extensión «debajo» de su asíntota.*

Por la fórmula (7), se tiene:

$$Y-y=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Siendo el denominador de este quebrado real y positivo para $x \geqslant a$, éste crece, al crecer x. Como aquí el numerador es una cantidad constante, por lo indicado anteriormente, al crecer x, el mismo quebrado siempre decrece.

De este modo, podemos afirmar que, si x tiende de una manera monótona al infinito positivo (es decir, que crece constantemente), $MN=Y-y$ tiende también a cero de un modo monótono (es decir, que decrece constantemente).

Sea φ el ángulo de inclinación de la recta $y=\frac{b}{a}x$ con el eje Ox, y P el pie de la perpendicular bajada desde el punto M a esta recta; es evidente, entonces, que

$$MP=MN\cdot\cos\varphi. \tag{8}$$

Como MN tiende a cero de manera monótona, y $\cos\varphi$ es constante, de la fórmula (8) se deduce, que MP tiende a cero de una manera monótona.

Dicho de otro modo, cualquiera que sea la situación del punto M en la hipérbola (4) (en el primer cuadrante coordenado), si el punto se mueve «hacia la derecha» por la hipérbola, su distancia hasta la asíntota disminuye. Esta circunstancia la expresaremos del modo siguiente: *la aproximación de la hipérbola a su asíntota es monótona.*

90. Hagamos un resumen de todo lo expuesto en los nºnº 86—89.

La parte de la hipérbola considerada, que está situada en el primer cuadrante coordenado, parte del punto $A(a; 0)$ y va al infinito «hacia la derecha» y «hacia arriba», aproximándose de un modo asintótico a la recta $y=\frac{b}{a}x$ «por debajo» y de modo monótono.

La fig. 55 ha sido construida de acuerdo con la proposición expuesta.

Nota. Son importantes también las siguientes dos propiedades de la gráfica considerada: 1) su dirección en el punto $A(a; 0)$ es perpendicular al eje Ox, 2) su convexidad siempre está dirigida hacia «arriba». Sin embargo, aquí no vamos a demostrar estas propiedades, puesto que tal discusión de la gráfica sería más natural hacerla empleando los medios del análisis matemático.

91. Una vez estudiada la parte de la hipérbola (4) situada en el primer cuadrante coordenado, se puede determinar fácilmente la forma general de la hipérbola entera, ya que ésta es simétrica con respecto a los ejes coordenados.

En la fig. 57 está representada la hipérbola determinada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Es fácil de entender que ésta (la hipérbola entera) *tiene dos asíntotas*

$$y=\frac{b}{a}x$$

y

$$y=-\frac{b}{a}x;$$

la primera de estas rectas ya la conocemos, la segunda es simétrica a ésta con respecto al eje Ox (o al eje Oy).

Generalmente, los ejes de simetría de la hipérbola se llaman simplemente *ejes* y el punto de intersección de los ejes, *centro* de la hipérbola. (En este caso, se trata de la hipérbola cuyos ejes coinciden con los ejes coordenados). Uno de los ejes (en este caso, el que coincide con el eje Ox) corta a la hipérbola, el otro no la corta. Los puntos de intersección de la hipérbola con el eje se llaman *vértices*; la hipérbola tiene dos vértices (en la fig. 57 éstos se denotan con las letras A y A').

El rectángulo con los lados $2a$ y $2b$, situado simétricamente respecto a los ejes de la hipérbola y que es tangente a la misma en los vértices, lo llamaremos *rectángulo principal* de la hipérbola (rectángulo $BB'C'C$ de la fig. 57). Las diagonales del rectángulo principal de la hipérbola coinciden con sus asíntotas.

Obsérvese que en los libros de matemáticas está convenido llamar también ejes de la hipérbola a los segmentos de longitud $2a$ y $2b$ que unen los puntos medios de los lados opuestos del rectángulo principal. De acuerdo a esto, se suele decir que la *ecuación*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

determina una hipérbola con los semiejes a y b.

Nota. Si se quiere hacer el croquis de la hipérbola con los semiejes a y b, se debe construir, primero, el rectángulo principal y,

después, las asíntotas. Después de esto, se puede representar la misma hipérbola, bien «a ojo», bien trazando previamente algunos de sus puntos en el plano. En la fig. 57 está señalado con líneas de puntos cómo se pueden trazar los focos de la hipérbola, conociendo su rectángulo principal; es evidente que esta construcción está basada en la igualdad $c^2=a^2+b^2$ (que se deduce de la fórmula (11) nº 84).

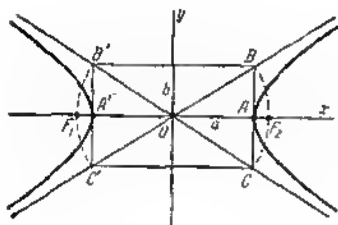


Fig. 57.

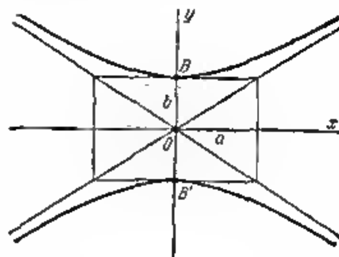


Fig. 58.

92. Consideremos ahora la ecuación de la forma:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{9}$$

Mediante una permutación de las letras x e y, a y b, ésta se reduce a la ecuación estudiada en los párrafos anteriores. De aquí se ve claro que la ecuación (9) determina una hipérbola como la representada en la fig. 58 (sus vértices B y B' están situados en el eje Oy). La ecuación (9) se llama también ecuación canónica de la hipérbola.

93. Dos hipérbolas que en un mismo sistema de coordenadas se determinan por las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

con iguales valores de a y b, se llaman *conjugadas* entre sí.

94. La hipérbola, cuyos semiejes son iguales ($a=b$), se llama *equilátera*. La ecuación canónica de la hipérbola equilátera se puede escribir de la forma siguiente:

$$x^2-y^2=a^2.$$

Es evidente que el rectángulo principal de la hipérbola equilátera es un cuadrado; está claro que *las asíntotas de la hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí.*

§ 32. Excentricidad de la hipérbola

95. *Se llama excentricidad de la hipérbola a la relación de la distancia entre los focos de esta hipérbola a la distancia entre sus vértices*; designando la excentricidad de la hipérbola con la letra ε, se tiene:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Como para la hipérbola tenemos $c > a$, resulta $\varepsilon > 1$; o sea, *la excentricidad de la hipérbola es mayor que la unidad.*

Observando que $c^2 = a^2 + b^2$, hallamos:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

de aquí que

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Por consiguiente, la excentricidad se determina por la razón $\frac{b}{a}$ y esta razón, a su vez, se determina por la excentricidad. De este modo, *la excentricidad de la hipérbola es una característica de la forma de su rectángulo principal y, por lo tanto, de la forma de la misma hipérbola.*

Cuanto menor sea la excentricidad, es decir, cuanto más se aproxime a la unidad, tanto menor será $\varepsilon^2 - 1$, y tanto menor será, por lo tanto, la razón $\frac{b}{a}$; por consiguiente, *cuanto menor sea la excentricidad de la hipérbola, tanto más alargado será su rectángulo principal* (en dirección del eje que une los vértices). En el caso de la hipérbola equilátera, $a = b$ y $\varepsilon = \sqrt{2}$.

§ 33. Expresiones racionales de los radios focales de la hipérbola

96. Consideremos un punto arbitrario $M(x; y)$ situado en la hipérbola dada. Si r_1 y r_2 son los radios focales de este punto, tenemos

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \qquad (1)$$

Resulta que para las expresiones de los radios focales se pueden dar fórmulas que carecen de irracionalidades.

En efecto, de la igualdad (8) nº 84, resulta:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm\left(\frac{c}{a}x - a\right);$$

aquí el signo más se refiere al caso en que el punto M está situado en la rama derecha de la hipérbola. Poniendo $\frac{c}{a} = \varepsilon$ y

teniendo en cuenta la segunda de las igualdades (1), se tiene:

$$r_2 = \pm(\varepsilon x - a). \tag{2}$$

Para expresar el primer radio focal utilizaremos la relación fundamental: $r_1 - r_2 = \pm 2a$, donde el signo más también se refiere a los puntos de la rama derecha de la hipérbola. De esta relación hallamos, $r_1 = r_2 \pm 2a = \pm(\varepsilon x + a)$. En conclusión, para los puntos de la rama derecha de la hipérbola,

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a, \tag{3}$$

y para los puntos de la rama izquierda

$$r_1 = -(\varepsilon x + a), \qquad r_2 = -(\varepsilon x - a). \tag{4}$$

Estas fórmulas se emplearán a menudo en el siguiente párrafo.

§ 34. Directrices de la elipse y de la hipérbola

97. Consideremos una elipse e introduzcamos un sistema de coordenadas cartesiano rectangular, de tal modo que esta elipse se determine por la ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Supongamos que la elipse considerada no es una circunferencia, es decir, que $a \neq b$ y, por lo tanto, $\varepsilon \neq 0$. Supongamos, además, que esta elipse es alargada en dirección del eje Ox, o sea, que $a > b$.

Dos rectas, perpendiculares al eje mayor de la elipse y simétricas con respecto al centro, situadas a la distancia $\frac{a}{\varepsilon}$ *de él, se llaman directrices de la elipse.*

Las ecuaciones de las directrices en el sistema de coordenadas elegido son de la forma

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \qquad \text{y} \qquad x = +\frac{a}{\varepsilon}.$$

Convengamos en llamar a la primera, de la izquierda y, a la segunda, de la derecha.

Como para la elipse $\varepsilon < 1$, se tiene $\frac{a}{\varepsilon} > a$. De aquí se deduce que la directriz de la derecha está situada a la derecha del vértice derecho de la elipse; por analogía, la directriz de la izquierda está situada a la izquierda del vértice izquierdo. En la fig. 59 está representada una elipse con sus directrices.

98. Consideremos una hipérbola e introduzcamos un sistema de coordenadas cartesiano rectangular, de tal modo que esta hipérbola se determine por la ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dos rectas, perpendiculares al eje de la hipérbola, que la cortan y son simétricas con respecto al centro, situadas a la distancia $\frac{a}{\varepsilon}$ de él, se llaman directrices de la hipérbola.

Las ecuaciones de las directrices en el sistema de coordenadas elegido son de la forma

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \qquad \text{y} \qquad x = +\frac{a}{\varepsilon}.$$

La primera de ellas la llamaremos directriz de la izquierda, la segunda, directriz de la derecha.

Como para la hipérbola $\varepsilon > 1$, resulta $\frac{a}{\varepsilon} < a$. De aquí se deduce, que la directriz de la derecha está situada entre el centro

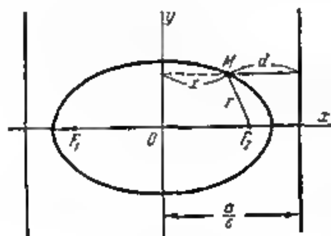


Fig. 59.

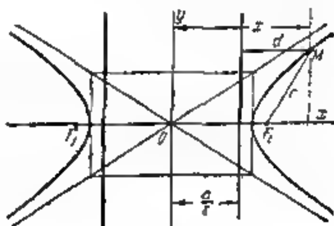


Fig. 60.

y el vértice derecho de la hipérbola; análogamente, la directriz de la izquierda está situada entre el centro y el vértice izquierdo. En la fig. 60 está representada una hipérbola con sus directrices.

99. Los dos teoremas siguientes manifiestan la importancia de las directrices de la elipse y de la hipérbola.

Teorema 11. *Si r es la distancia de un punto arbitrario de la elipse a uno de los focos, d es la distancia del mismo punto a la directriz correspondiente a este foco, la razón $\frac{r}{d}$ es una cantidad constante, igual a la excentricidad de la elipse:*

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos, para precisar, que se trata del foco derecho y de la directriz de la derecha. Sea $M(x; y)$ un punto arbitrario de la elipse (véase la fig. 59). La distancia del punto M a la directriz de la derecha se expresa por la igualdad

$$d = \frac{a}{\varepsilon} - x, \tag{1}$$

que fácilmente se ve en el diagrama; la distancia del punto M al foco derecho la proporciona la segunda de las fórmulas (2) § 27:

$$r = a - \varepsilon x. \qquad (2)$$

De las relaciones (1) y (2) tenemos:

$$\frac{r}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{(a - \varepsilon x)\,\varepsilon}{a - \varepsilon x} = \varepsilon.$$

Con esto, el teorema queda demostrado.

Teorema 12. *Si r es la distancia de un punto arbitrario de la hipérbola a alguno de los focos y d es la distancia de este mismo punto a la directriz correspondiente a este foco, la razón $\frac{r}{d}$ es una cantidad constante, igual a la excentricidad de la hipérbola:*

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos, para precisar, que se trata del foco derecho y de la directriz de la derecha. Sea $M(x;\ y)$ un punto arbitrario de la hipérbola (véase la fig. 60). Tenemos que analizar dos casos:

1) El punto M está situado en la mitad derecha de la hipérbola. Entonces, la distancia del punto M a la directriz de la derecha se expresa por la igualdad

$$d = x - \frac{a}{\varepsilon}, \qquad (3)$$

la cual fácilmente se ve en la figura. La distancia del punto M al foco derecho la proporciona la segunda de las fórmulas (3) § 33:

$$r = \varepsilon x - a. \qquad (4)$$

De las relaciones (3) y (4) tenemos:

$$\frac{r}{d} = \frac{\varepsilon x - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(\varepsilon x - a)\,\varepsilon}{\varepsilon x - a} = \varepsilon.$$

2) El punto M está situado en la mitad izquierda de la hipérbola. Entonces, la distancia del punto M a la directriz de la derecha se expresa por la igualdad

$$d = |x| + \frac{a}{\varepsilon}$$

($|x|$ es la distancia del punto M al eje Oy, $\frac{a}{\varepsilon}$ es la distancia de la directriz al eje Oy, d es la suma de estas distancias); pero como M está situado en la mitad izquierda de la hipérbola, x es

una cantidad negativa, por consiguiente, $|x| = -x$, y se tiene:

$$d = -x + \frac{a}{\varepsilon}. \qquad (5)$$

La distancia del punto M al foco derecho la proporciona la segunda de las fórmulas (4) § 33:

$$r = -(\varepsilon x - a). \qquad (6)$$

De las relaciones (5) y (6), hallamos:

$$\frac{r}{d} = \frac{-(\varepsilon x - a)}{-x + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(-\varepsilon x + a)\,\varepsilon}{-\varepsilon x + a} = \varepsilon.$$

Con lo que el teorema queda demostrado.

100. La propiedad de la elipse y de la hipérbola expresada por los teoremas anteriores puede servir de base para la definición de estas líneas. A saber: *el lugar geométrico de los puntos, para los cuales la distancia r de un punto fijo (foco) y la distancia d a una recta fija (directriz) forman una razón constante*

$$\frac{r}{d} = \varepsilon \ (\varepsilon = \text{const}),$$

es una elipse, si $\varepsilon < 1$, y una hipérbola, si $\varepsilon > 1$. (Para comprobar esta afirmación se debe deducir la ecuación del lugar geométrico indicado y verificar que la ecuación obtenida representa una elipse o una hipérbola, según que $\varepsilon < 1$ o que $\varepsilon > 1$.)

Es lógico preguntarse: ¿qué representa el lugar geométrico de los puntos, determinado de modo análogo, pero con la condición de que sea $\varepsilon = 1$, es decir, el lugar geométrico de los puntos para cada uno de los cuales $r = d$? Resulta que es una nueva línea de segundo orden, llamada parábola.

§ 35. La parábola. Deducción de la ecuación canónica de la parábola

101. *Se llama parábola al lugar geométrico de puntos equidistantes de un punto fijo del plano, llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz* (se supone que esta recta no pasa por el foco).

Está convenido designar el foco de la parábola con la letra F, la distancia del foco a la directriz, con la letra p. La cantidad p se llama *parámetro* de la parábola. En la fig. 61 está representada la parábola (el lector obtendrá una explicación completa de esta figura después de leer algunos de los párrafos que siguen).

Nota. De acuerdo a lo expuesto en el nº 100, se dice que *la excentricidad de la parábola es $\varepsilon = 1$.*

102. Sea dada una parábola (suponemos a la vez que se conoce el parámetro p). Introduzcamos en el plano un sistema de coordenadas

cartesiano rectangular, cuyos ejes los situaremos de un modo especial respecto a dicha parábola. A saber: tracemos el eje de abscisas por el foco perpendicular a la directriz y supongamos que lleva la dirección de la directriz al foco; el origen de coordenadas lo situaremos en medio del foco y la directriz (fig. 61). Deduzcamos la ecuación de la parábola en este sistema de coordenadas.

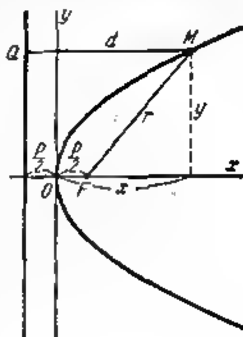


Fig. 61.

Tomemos en el plano un punto arbitrario M y designemos sus coordenadas mediante x e y. Designemos por r la distancia del punto M al foco ($r = FM$), por d, la distancia del punto M a la directriz. El punto M estará situado en la parábola dada cuando, y sólo cuando,

$$r = d. \qquad (1)$$

Para obtener la ecuación buscada, es necesario sustituir las variables r y d en la igualdad (1) por sus expresiones mediante las coordenadas variables x, y. Hagamos notar que el foco F tiene las coordenadas $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$; teniendo en cuenta esto y aplicando la fórmula (2) nº 18, hallamos:

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}. \qquad (2)$$

Designemos con la letra Q el pie de la perpendicular bajada desde el punto M a la directriz. Es evidente que las coordenadas del punto Q son $\left(-\frac{p}{2};\ y\right)$; de aquí y por las fórmulas (2) nº 18, obtenemos:

$$d = MQ = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = x + \frac{p}{2} \qquad (3)$$

(al extraer la raíz hemos tomado $x + \frac{p}{2}$ con su mismo signo, puesto que $x + \frac{p}{2}$ es un número positivo; esto es debido a que el punto $M(x;\ y)$ tiene que estar situado en la parte que está el foco respecto a la directriz, es decir, tiene que ser $x > -\frac{p}{2}$, de donde $x + \frac{p}{2} > 0$).

Sustituyendo r y d en la igualdad (1) por sus expresiones (2) y (3), hallamos:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \qquad (4)$$

Esta es la ecuación de la parábola considerada en el sistema de coordenadas asignado, puesto que a ella satisfacen las coordenadas

del punto $M(x; y)$ cuando, y sólo cuando, el punto M está situado en la parábola dada.

Queriendo obtener la ecuación de la parábola en una forma más simple, elevaremos al cuadrado los dos miembros de la igualdad (4); obtendremos:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}, \tag{5}$$

o sea,

$$y^2 = 2px. \tag{6}$$

La ecuación (6) la hemos obtenido como consecuencia de la ecuación (4). Por otra parte, es fácil demostrar que la ecuación (4) se puede deducir de la ecuación (6). En efecto, la ecuación (5) se deduce («a la inversa») de la ecuación (6); además, de la ecuación (5), se tiene:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \pm\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

Queda por demostrar que, si x, y satisfacen a la ecuación (6), solamente se puede tomar aquí el signo más. Pero esto es claro, puesto que por la ecuación (6), $x = \frac{y^2}{2p}$, por consiguiente, $x \geqslant 0$, y por eso, $x + \frac{p}{2}$ es un número positivo. En conclusión, obtenemos la ecuación (4). Como las ecuaciones (4) y (6) son consecuencia una de la otra, éstas son equivalentes. De esto se deduce que *la ecuación* (6) *es la ecuación de la parábola*. Esta ecuación se llama ecuación *canónica* de la parábola.

103. La ecuación $y^2 = 2px$, que determina una parábola en un sistema de coordenadas cartesiano rectangular, es una ecuación de segundo grado; por lo tanto, *la parábola es una línea de segundo orden.*

§ 36. Análisis de la forma de la parábola

104. Procuraremos aclarar la forma de la parábola haciendo un análisis de su ecuación

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

y, por lo tanto, daremos un fundamento a la representación en el plano de la misma, indicada anteriormente.

Como la ecuación (1) contiene solamente una potencia par de y, la parábola determinada por ella es simétrica con respecto al eje Ox. Por eso, es suficiente estudiar solamente aquella parte de la misma que está situada en el semiplano superior. Esta parte de la parábola se determina por la ecuación

$$y = +\sqrt{2px}. \tag{2}$$

Para valores negativos de x, la ecuación (2) proporciona valores imaginarios de y. Por lo tanto, a la izquierda del eje Oy no hay ningún

punto de la parábola. Para $x=0$, tendremos $y=0$. O sea, el origen de coordenadas está situado en la parábola y es el punto de la misma que está situado más a la «izquierda». Supongamos ahora que x crece, partiendo de cero; como bien se ve por la ecuación (2), y crecerá constantemente. De la ecuación (2) también se ve que $y \to +\infty$, si $x \to +\infty$.

Por consiguiente, al describir la parte considerada de la parábola, el punto variable $M(x, y)$ parte del origen de coordenadas y se mueve «hacia la derecha» y «hacia arriba»; el alejamiento del punto M del eje Oy «hacia la derecha» y del eje Ox «hacia arriba» es infinito (fig. 62).

Nota. Son esenciales otras dos propiedades de la parábola: 1) su dirección en el punto $O(0; 0)$ es perpendicular al eje Ox; 2) la convexidad de la parte de la parábola, situada en el semiplano

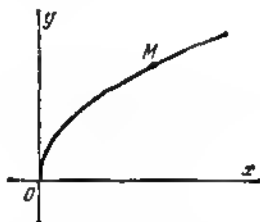


Fig. 62.

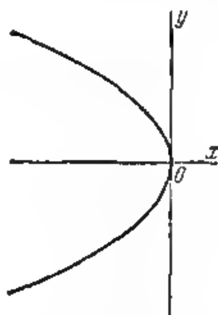


Fig. 63.

superior, está dirigida «hacia arriba». La figura 62 se ha trazado de acuerdo a estas propiedades. Aquí no vamos a demostrar estas propiedades, puesto que resulta más natural analizar tales líneas empleando los métodos del análisis matemático.

105. Una vez determinada la forma de la parte de la parábola situada en el semiplano superior, será fácil determinar la forma de la parábola entera. Para eso es suficiente efectuar un trazado simétrico con respecto al eje Ox. La figura 61 considerada anteriormente nos da una idea general de la parábola entera dada por la ecuación

$$y^2 = 2px.$$

Generalmente, el eje de simetría de la parábola se llama simplemente *eje* (en este caso coincide con el eje Ox). El punto en el que la parábola se corta con su eje se llama *vértice* (en este caso el vértice coincide con el origen de coordenadas). El número p, es decir, el

parámetro de la parábola, expresa la distancia del foco a la directriz. El significado geométrico del parámetro p se puede describir también del siguiente modo. Tomemos un valor determinado de la abscisa, por ejemplo, $x=1$, y hallemos de la ecuación (1) los valores correspondientes de la ordenada: $y=\pm\sqrt{2p}$. En la parábola obtenemos dos puntos, $M_1(1;\ +\sqrt{2p})$ y $M_2(1;\ -\sqrt{2p})$, simétricos respecto al eje; la distancia entre ellos es igual a $2\sqrt{2p}$. Por lo tanto, $2\sqrt{2p}$ es la longitud de la cuerda de la parábola trazada perpendicularmente al eje, a la distancia de una unidad de longitud del vértice. Vemos pues, que la longitud de esta cuerda $(=2\sqrt{2p})$

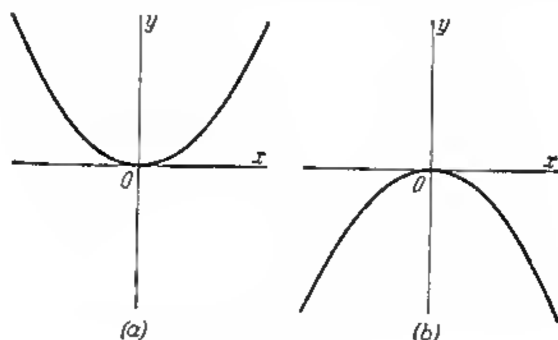


Fig. 64.

es tanto mayor, cuanto mayor sea p. Por consiguiente, el parámetro p caracteriza la «amplitud» del recinto limitado por la parábola, con la condición de que esta «amplitud» se mida perpendicularmente al eje, a una distancia determinada del vértice.

106. La ecuación

$$y^2=-2px \tag{3}$$

(para valores positivos de p) se reduce a la ecuación $y^2=2px$, después de la sustitución de x por $-x$, es decir, después de una transformación de coordenadas que corresponde al cambio de la dirección del eje Ox por la contraria. De aquí que la ecuación $y^2=-2px$ también determina una parábola, cuyo eje coincide con el eje Ox y el vértice con el origen de coordenadas, pero situada en el semiplano izquierdo (así como está representado en la fig. 63).

107. Por analogía con lo anterior, podemos afirmar que cada una de las ecuaciones

$$x^2=2py,\ x^2=-2py$$

($p > 0$) determina una parábola con el vértice en el origen de coordenadas, situada simétricamente con respecto al eje Oy (estas ecuaciones de la parábola, así como las ecuaciones (1) y (3) se llaman canónicas). La parábola determinada por la ecuación $x^2 = 2py$ la llamaremos *ascendente*, la determinada por la ecuación $x^2 = -2py$, *descendente* (véanse sus correspondientes, fig. 64, *a* y *b*); estas denominaciones son naturales y no exigen explicaciones.

§ 37. Ecuación polar de la elipse, hipérbola y parábola

108. Vamos a deducir *la ecuación polar de la elipse, hipérbola y parábola* (cuya forma de escritura es común para estas tres líneas), *estando situado el eje polar de una manera especial*; emplearemos con este fin los resultados expuestos en los n°n° 99—102. Advertimos, sin embargo, que en el caso de la hipérbola, esta ecuación no determina toda la línea, sino solamente una de sus ramas.

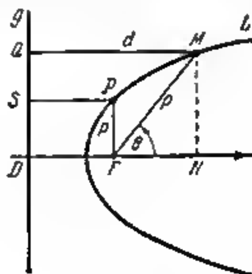


Fig. 65.

Sea dada una de las líneas nombradas; la elipse, la hipérbola o la parábola (si la línea dada es la hipérbola, consideraremos solamente una de sus ramas); designémosla con la letra L.

Supongamos que F es el foco de la línea y g la directriz correspondiente a este foco (en el caso de la hipérbola, por F y g tomaremos el foco y la directriz más aproximados a la línea considerada).

Introduzcamos un sistema polar de coordenadas de tal modo, que el polo coincida con el foco F y el eje polar con el eje de la línea L; partiendo del polo, la dirección del eje tiene que ser opuesta al lado en que se encuentra la directriz g (fig. 65). Designemos, como siempre, las coordenadas polares de un punto arbitrario M de la línea L mediante ρ y θ. Para deducir la ecuación de la línea L, partiremos de la relación

$$\frac{r}{d} = \varepsilon, \tag{1}$$

en donde ε es la excentricidad de la línea y r y d tienen el mismo significado que en los n°n° 99—102.

Como el polo coincide con el foco F, se tiene,

$$r = \rho. \tag{2}$$

Además,

$$d = QM = DN = DF + FN = DF + \rho \cos \theta. \tag{3}$$

Supongamos que P es un punto situado en la línea L de tal manera, que el segmento FP sea perpendicular al eje de la línea L, y sea p la longitud del segmento FP. Es decir, p es *la mitad de la cuerda focal de la línea L, que es perpendicular a su eje;* esta cantidad se llama *parámetro focal* de la línea L *).

Como resultado de la relación fundamental (1), referida a todos los puntos de la línea L, se tiene (y en particular para el punto P):

$$\frac{FP}{SP} = \varepsilon,$$

de donde $SP = \frac{FP}{\varepsilon} = \frac{p}{\varepsilon}$. Pero, $SP = DF$; por lo tanto,

$$DF = \frac{p}{\varepsilon}.$$

De la última igualdad y de la igualdad (3) obtenemos:

$$d = \frac{p}{\varepsilon} + \rho \cos \theta. \tag{4}$$

Sustituyendo ahora r y d en el primer miembro de la ecuación (1) por sus expresiones (2) y (4), hallamos:

$$\frac{\rho}{\frac{p}{\varepsilon} + \rho \cos \theta} = \varepsilon,$$

de donde,

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}. \tag{5}$$

Esta es la ecuación polar de la elipse, hipérbola (mejor dicho, una rama de la hipérbola) y parábola. Aquí p es el parámetro focal y ε la excentricidad de la curva. La ecuación (5) se aplica en la mecánica:

---

*) Si la línea L es la parábola, $FP = PS$ (véase n° 101), por lo tanto, $p = DF$, es decir, p es la distancia del foco a la directriz. Así pues, en este caso la magnitud p coincide con el parámetro de la parábola que conocimos antes, designándole con la misma letra.

§ 38. Diámetros de las líneas de segundo orden

109. El teorema expuesto a continuación nos proporciona una propiedad imprevista y muy importante de las líneas de segundo orden (de la elipse, hipérbola y parábola):

Teorema 13. *Los puntos medios de las cuerdas paralelas de una línea de segundo orden están situados en una recta.*

Demostración. 1) Supongamos que la línea dada es una elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

(fig. 66). Designemos por k el coeficiente angular común de las cuerdas paralelas; entonces, la ecuación de cada una de ellas se puede escribir de la forma

$$y=kx+l; \tag{2}$$

aquí l tiene valores diversos para cuerdas diferentes.

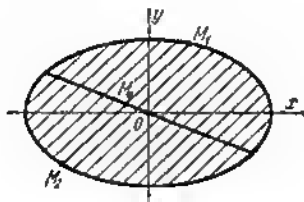


Fig. 66.

Vamos a buscar los extremos de la cuerda determinada por la ecuación (2) para algún valor de l. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1) y (2) eliminamos y de ellas; resulta:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+l)^2}{b^2}=1,$$

o sea,

$$(b^2+a^2k^2)\,x^2+2a^2klx+a^2\,(l^2-b^2)=0. \tag{3}$$

Las raíces x_1, x_2 de esta ecuación cuadrada son las abscisas de los extremos M_1, M_2 de la cuerda. Sea $M_0\,(x_0;\ y_0)$ el punto medio de esta cuerda; entonces

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Pero, por el conocido teorema de la suma de raíces de la ecuación cuadrada

$$x_1+x_2=-\frac{2a^2kl}{b^2+a^2k^2}.$$

Por lo tanto,

$$x_0=-\frac{a^2kl}{b^2+a^2k^2}.$$

Conociendo x_0, hallamos y_0 de la ecuación (2):

$$y_0=kx_0+l=-\frac{a^2k^2l}{b^2+a^2k^2}+l=\frac{b^2l}{b^2+a^2k^2}.$$

Así pues,

$$x_0 = -\frac{a^2kl}{b^2 + a^2k^2}, \qquad y_0 = \frac{b^2l}{b^2 + a^2k^2}. \tag{4}$$

Variando aquí l, obtendremos las coordenadas de los puntos medios de diversas cuerdas de la elipse paralelas entre sí; pero, sin embargo, como bien se ve de las relaciones (4), x_0, y_0 están constantemente ligados por la ecuación

$$\frac{y_0}{x_0} = -\frac{b^2}{a^2k},$$

o sea, $y_0 = k'x_0$, en donde

$$k' = -\frac{b^2}{a^2k}. \tag{5}$$

Por lo tando, los puntos medios de todas las cuerdas están situados en la recta

$$y = k'x. \tag{6}$$

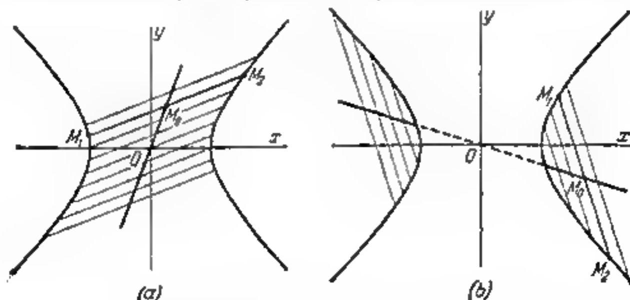
2) Supongamos que la línea dada es la h i p é r b o l a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

(fig. 67, *a*, *b*). Designemos por k el coeficiente angular común a las cuerdas paralelas; entonces, cada una de ellas se puede escribir de la forma

$$y = kx + l. \tag{8}$$

Obsérvese inmediatamente, que las cuerdas de la hipérbola no pueden ser paralelas a sus asíntotas (puesto que cada recta paralela a la asíntota se corta con



F i g. 67.

la hipérbola solamente en un punto); por eso $k \neq \frac{b}{a}$ y $k \neq -\frac{b}{a}$. Vamos o buscar los extremos de la cuerda determinada por la ecuación (8) para algún valor de l. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (7) y (8), eliminamos y:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx+l)^2}{b^2} = 1,$$

o sea,

$$(b^2 - a^2k^2)\, x^2 - 2a^2klx - a^2(l^2 + b^2) = 0. \tag{9}$$

Como $k \neq \pm \frac{b}{a}$, se tiene, $b^2 - a^2k^2 \neq 0$. Por consiguiente, la ecuación (9) es cuadrática. Las raíces x_1, x_2 de esta ecuación cuadrática son las abscisas de los extremos M_1, M_2 de la cuerda. Sea $M_0(x_0; y_0)$ el punto medio de la misma cuerda; entonces

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Aplicando el teorema de la suma de las raíces de la ecuación cuadrática, hallamos:

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2kl}{b^2 - a^2k^2}.$$

Por lo tanto, $x_0 = \frac{a^2kl}{b^2 - a^2k^2}$. Conociendo x_0, hallamos y_0 de la ecuación (8):

$$y_0 = kx_0 + l = \frac{a^2k^2l}{b^2 - a^2k^2} + l = \frac{b^2l}{b^2 - a^2k^2}.$$

Concluyendo,

$$x_0 = \frac{a^2kl}{b^2 - a^2k^2}, \qquad y_0 = \frac{b^2l}{b^2 - a^2k^2}. \tag{10}$$

Variando aquí l, obtendremos las coordenadas de los puntos medios de diversas cuerdas paralelas entre sí de la hipérbola; pero como bien se ve en las relaciones (10), x_0, y_0 están constantemente ligados por la ecuación

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{b^2}{a^2k},$$

o sea, $y_0 = k'x_0$, en donde

$$k' = \frac{b^2}{a^2k}. \tag{11}$$

Por lo tanto, los puntos medios de todas las cuerdas están situados en la recta

$$y = k'x. \tag{12}$$

3) Supongamos, finalmente, que la línea dada es una p a r á b o l a

$$y^2 = 2px \tag{13}$$

(fig. 68). Designemos por k el coeficiente angular común a las cuerdas paralelas; entonces, la ecuación de cada una de ellas se puede escribir de la forma

$$y = kx + l. \tag{14}$$

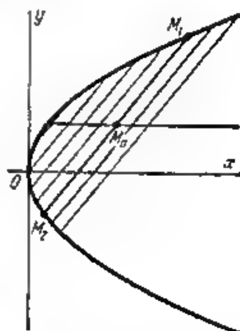


Fig. 68.

Hagamos notar inmediatamente que las cuerdas de la parábola no pueden ser paralelas a su eje (puesto que cada recta paralela al eje se corta con la parábola solamente en un punto); por eso $k \neq 0$.

Vamos a buscar los extremos de la cuerda, determinada por la ecuación (14), en donde l toma un valor determinado. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (13) y (14) y eliminando y, tenemos:

$$(kx + l)^2 - 2px = 0,$$

o sea,

$$k^2x^2+2(kl-p)x+l^2=0. \qquad (15)$$

Como $k \neq 0$, la ecuación (15) es cuadrática. Las raíces x_1 y x_2 de esta ecuación son las abscisas de los extremos M_1 y M_2 de la cuerda. Sea $M_0(x_0; y_0)$ el punto medio de esta cuerda. Se tiene:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2};$$

por el teorema de la suma de las raíces de la ecuación cuadrática,

$$x_1+x_2=-\frac{2(kl-p)}{k^2}.$$

Por lo tanto, $x_0=\frac{p-kl}{k^2}$. Conociendo x_0, hallamos y_0 de la ecuación (14):

$$y_0=kx_0+l=k\frac{p-kl}{k^2}+l=\frac{p}{k}.$$

Así pues,

$$x_0=\frac{p-kl}{k^2}, \qquad y_0=\frac{p}{k}. \qquad (16)$$

Variando aquí l, obtendremos las coordenadas de los puntos medios de diversas cuerdas de la parábola paralelas entre sí; pero, sin embargo, como bien se ve de las relaciones (16), y_0 permanece constantemente igual al número $\frac{p}{k}$. Por lo tanto, los puntos medios de todas las cuerdas están situados en la recta

$$y=\frac{p}{k}, \qquad (17)$$

que es paralela al eje de abscisas y, a la vez, es paralela al eje de la parábola.

Podríamos decir ahora que el teorema está completamente demostrado, si no hubiese errores en nuestros razonamientos. En realidad, la cuerda de la línea de segundo orden la hemos representado por la ecuación con coeficiente angular (de la forma $y=kx+l$). Por lo tanto, nuestros razonamientos pierden el sentido, si las cuerdas consideradas son paralelas al eje Oy (puesto que las rectas paralelas al eje Oy carecen de coeficiente angular). Sin embargo, para tales cuerdas, el teorema es consecuencia inmediata de las propiedades de simetría de la elipse, de la hipérbola y de la parábola. En efecto, la elipse, la hipérbola y la parábola dadas por las ecuaciones canónicas (1), (7) y (13) son simétricas con respecto al eje Ox.

Por consiguiente, cuando las cuerdas de estas líneas son paralelas al eje Oy, los puntos medios de las mismas también están situados en una recta (en el eje Ox).

110. *La recta que pasa por los puntos medios de las cuerdas paralelas de una línea de segundo orden se llama diámetro.*

Todos los diámetros de la elipse y de la hipérbola pasan por el centro; geométricamente esto está claro (puesto que el centro es el punto medio de todas las cuerdas que pasan por él) y también se ve inmediatamente de las ecuaciones (6) y (12) nº 109.

Por la ecuación (17), *todos los diámetros de la parábola son paralelos a su eje.*

Señalemos algunas propiedades de los diámetros de la elipse y de la hipérbola.

Consideremos la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Sea k el coeficiente angular de alguno de sus diámetros. Tracemos una cuerda de la elipse paralela a este diámetro: el lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas es otro diámetro, que se llama *conjugado* al primero. Su coeficiente angular k' está determinado por la igualdad (5), o sea,

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2}. \qquad (18)$$

Vamos ahora a buscar el diámetro conjugado al diámetro de coeficiente angular k'; por analogía, el coeficiente angular k'' de este nuevo diámetro se determina por la igualdad

$$k'k'' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Por esto y por la ecuación (18), hallamos: $k'' = k$.

Por lo tanto, *si uno de dos diámetros de la elipse es conjugado al otro, este último será conjugado al primero.* Por eso, tales diámetros se llaman *conjugados entre sí.* La relación (18) se llama *condición de conjugación de diámetros* (de la elipse), *cuyos coeficientes angulares son* k y k'.

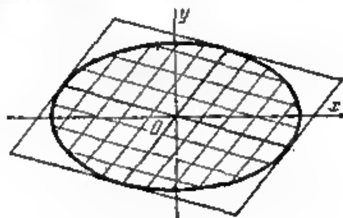


Fig. 69.

La conjugación mutua de diámetros se puede también expresar así: *si uno de dos diámetros de la elipse divide por la mitad las cuerdas paralelas al otro, este último divide por la mitad las cuerdas paralelas al primero* (fig. 69; esta figura sirve también de ilustración a una interesante consecuencia de la proposición anterior: las tangentes a la elipse en los extremos de su diámetro son paralelas entre sí y son paralelas al diámetro conjugado).

Todo lo dicho anteriormente sobre los diámetros de la elipse se refiere también a los diámetros de la hipérbola. Solamente que la condición de conjugación de los diámetros de la hipérbola difiere un poco de la relación (18). A saber: si la hipérbola se ha dado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la condición de conjugación de sus diámetros, cuyos coeficientes angulares son k y k', es:

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}. \qquad (19)$$

Esto se deduce de la igualdad (11).

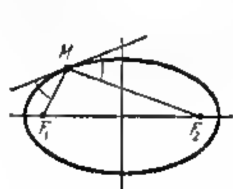
Observación. Los ejes de simetría de la elipse y de la hipérbola son diámetros conjugados entre sí, ya que cada uno de ellos divide por la mitad las cuerdas paralelas al otro. Los ejes de simetría se distinguen de los demás pares de diámetros conjugados en que, además de ser conjugados entre sí, son mutuamente perpendiculares.

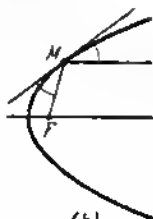
§ 39. Propiedades ópticas de la elipse, hipérbola y parábola

111. Entre las propiedades más notables de la elipse, hipérbola y parábola se distinguen sus propiedades ópticas. A propósito, estas propiedades muestran que el nombre "foco" tiene su origen en la física.

En primer lugar, vamos a dar su enunciado geométrico.

1. La recta tangente a la elipse en un punto M forma con los radios focales F_1M y F_2M ángulos iguales y pasa por fuera del ángulo F_1MF_2 (fig. 70, *a*).





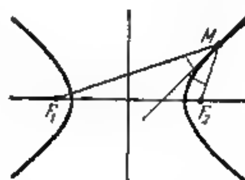


Fig. 70.

2. La recta tangente a la parábola en un punto M forma ángulos iguales con el radio focal FM y con el rayo que, partiendo del punto M, va paralelo al eje de la parábola en la dirección en que la parábola se extiende indefinidamente (fig. 70, *b*).

3. La recta, tangente a la hipérbola en un punto M, forma ángulos iguales con los radios focales F_1M y F_2M y pasa por dentro del ángulo F_1MF_2 (fig. 70, *c*).

Aquí no nos vamos a detener en la demostración de estas propiedades. Solamente agregaremos que, para su demostración mediante el cálculo, sería necesario saber expresar el coeficiente angular de la tangente, conociendo la ecuación de la curva y el punto de contacto. Las reglas correspondientes se estudian en el curso de análisis matemático. Para poner de manifiesto el significado físico de las proposiciones expuestas, figurémonos que la elipse, la parábola o la hipérbola, gira alrededor del eje (que contiene los focos). De este modo, se forma una superficie llamada elipsoide, paraboloide o hiperboloide, respectivamente. Una superficie real de esta forma, cubierta de amalgama, representa un espejo elíptico, parabólico o hiperbólico, respectivamente. Teniendo en cuenta las conocidas leyes en la óptica de reflexión de la luz, llegamos a la conclusión de que:

1. Si el foco luminoso está situado en uno de los focos de un espejo elíptico, al reflejarse sus rayos, éstos se concentran en el otro foco.

2. Si el foco luminoso está situado en el foco de un espejo parabólico, al reflejarse sus rayos, éstos van paralelos al eje.

3. Si el foco luminoso está situado en uno de los focos de un espejo hiperbólico, al reflejarse sus rayos, éstos van adelante como si partiesen del otro foco.

La construcción del proyector está basada en la propiedad indicada del espejo parabólico.

§ 40. La elipse, hipérbola y parábola como secciones cónicas

112. El teorema expuesto a continuación aclara desde un nuevo punto de vista el origen geométrico de las elipses, hipérbolas y parábolas:

T e o r e m a 14. *La sección de un cono circular cualquiera por un plano (que no pase por su vértice) determina una curva, que solamente puede ser una elipse, hipérbola o parábola. Además, si el plano*

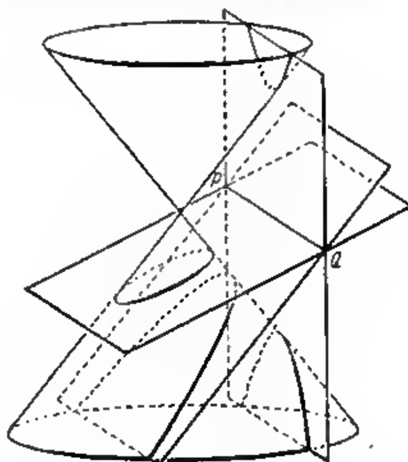


Fig. 71.

se corta solamente con una hoja del cono y la sección representa una curva cerrada, ésta es una elipse; si el plano secante se corta solamente con una hoja del cono y la sección representa una curva no cerrada, ésta es una parábola; si el plano se corta con las dos hojas del cono, en la sección se forma una hipérbola (fig. 71).

La validez de este teorema se puede establecer partiendo del principio general de que la intersección de una superficie de segundo

orden por un plano es una línea de segundo orden (véase por ejemplo, nuestro libro «Formas cuadráticas y matrices», nº 31, 32).

En la fig. 71 se puede ver que, haciendo girar el plano secante alrededor de la recta PQ, la curva de la sección varía. Esta se transforma, al principio, en elipse, a continuación, en parábola y, después, en hipérbola. Esta curva es una parábola cuando el plano secante es paralelo al plano tangente del cono.

Como consecuencia de lo dicho en este párrafo, las elipses, las hipérbolas y las parábolas se llaman *secciones cónicas*.

6.

TRANSFORMACION DE ECUACIONES POR CAMBIO DE COORDENADAS

§ 41. Ejemplos de reducción de la ecuación general de una línea de segundo orden a la forma canónica

113. Un problema muy importante de la geometría analítica es el del estudio de la ecuación general de la línea de segundo orden y de su reducción a la forma más simple (forma canónica). No pretendemos resolver aquí este problema en forma general, pero trataremos, sin embargo, de dar en este parágrafo únicamente la explicación esencial de la cuestión empleando ejemplos concretos.

Recordemos, ante todo, una observación de carácter práctico. Anteriormente (§ 15) escribíamos la ecuación general de la línea de segundo orden, es decir, la ecuación general de segundo grado respecto a x, y, en la forma

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Sin embargo, en la mayoría de las fórmulas teóricas de las líneas de segundo orden, figuran los coeficientes B, D y E divididos por 2. Por eso, resulta ser más conveniente escribir la ecuación general de segundo grado de la forma siguiente:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

de modo que las letras B, D y E indican ahora la mitad de los coeficientes correspondientes. Por ejemplo, si se da la ecuación

$$x^2+3xy+2y^2+5x+4y+1=0,$$

se tiene,

$$\mathrm{A}=1,\ \mathrm{B}=\frac{3}{2},\ \mathrm{C}=2,\ \mathrm{D}=\frac{5}{2},\ \mathrm{E}=2,\ \mathrm{F}=1.$$

Los números A, B, C, D, E, F se llaman *coeficientes* de la ecuación (1) (como vemos, para B, D y E esta denominación es convencional). Los primeros tres términos de la ecuación (1), es decir, los términos de segundo grado, se llaman términos *superiores*.

Para demostrar inmediatamente la comodidad de tal escritura de la ecuación de segundo grado en la forma (1), prestemos atención a la siguiente identidad:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=$$
$$=(Ax+By+D)\,x+(Bx+Cy+E)\,y+(Dx+Ey+F), \qquad (2)$$

que se demuestra sin gran dificultad. Esta indica que el segundo, cuarto y quinto términos de la ecuación (1) se componen, naturalmente, cada uno de ellos de dos ejemplares iguales. La identidad (2) resulta ser útil en muchos casos y pronto la emplearemos.

114. Dada la ecuación general de la línea de segundo orden:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

se pretende simplificar esta ecuación mediante un cambio de coordenadas (con otra posición más conveniente de los ejes).

Precisemos lo que se pide:

1) se necesita conseguir que en el grupo de los términos superiores desaparezca el término del producto de las coordenadas variables; 2) que quede el menor número de términos de primer grado (si se pudiese, que no quedase ninguno); 3) hacer desaparecer, si se puede, el término independiente. La ecuación que se obtiene una vez cumplidas estas condiciones, se llama *canónica*. En los ejemplos dados a continuación se indica cómo se deben efectuar las operaciones necesarias para reducir la ecuación dada a la forma canónica.

Ejemplo. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$17x^2+12xy+8y^2-46x-28y+17=0. \qquad (3)$$

Solución. Procuremos, ante todo, simplificar la ecuación mediante un traslado paralelo de los ejes coordenados. Traslademos el origen de coordenadas al punto $S(x_0;\ y_0)$, que por ahora vamos a suponer arbitrario. De acuerdo al § 8, se tiene la transformación correspondiente de coordenadas:

$$x=\bar{x}+x_0, \quad y=\bar{y}+y_0. \qquad (4)$$

Pasemos a las nuevas coordenadas en el primer miembro de la ecuación (3) (es decir, que sustituimos x, y por sus expresiones (4)); después de la reducción de términos semejantes, hallemos:

$$17x^2+12xy+8y^2-46x-28y+17=$$
$$=17\bar{x}^2+12\bar{x}\bar{y}+8\bar{y}^2+2\,(17x_0+6y_0-23)\,\bar{x}+$$
$$+2\,(6x_0+8y_0-14)\,\bar{y}+(17x_0^2+12x_0y_0+8y_0^2-$$
$$-46x_0-28y_0+17). \qquad (5)$$

En la ecuación deducida de la curva dada desaparecerán los términos de primer grado, si elegimos x_0, y_0 de tal modo que se verifiquen las igualdades:

$$17x_0+6y_0-23=0,$$
$$6x_0+8y_0-14=0. \qquad (6)$$

Resolviendo simultáneamente estas ecuaciones, obtenemos: $x_0=1$; $y_0=1$. Resulta sencillo calcular el término independiente de la ecuación transformada, que lo

indicaremos mediante $\bar{F}$, aplicando la identidad (2) y teniendo en cuenta las ecuaciones (6):

$$\bar{F}=17x_0^2+12x_0y_0+8y_0^2-46x_0-28y_0+17=(17x_0+6y_0-23)\,x_0+$$
$$+(6x_0+8y_0-14)\,y_0+(-23x_0-14y_0+17)=-23x_0-14y_0+17=-20.$$

El origen de coordenadas del sistema nuevo se encuentra ahora en el punto S (cuyas coordenadas primitivas son $x_0=1$, $y_0=1$). La ecuación en coordenadas nuevas es de la forma:

$$17\tilde{x}^2+12\tilde{x}\tilde{y}+8\tilde{y}^2-20=0. \tag{7}$$

Obsérvese que el primer miembro de la ecuación (7) no varía al sustituir $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ por $-\tilde{x}$, $-\tilde{y}$. Por eso, si a la ecuación (7) satisfacen los números $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, a ella satisfacen también los números $-\tilde{x}$, $-\tilde{y}$. O sea, si un punto $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ está situado en la curva dada, el punto $N(-\tilde{x}, -\tilde{y})$ también estará situado en la misma curva. Pero los puntos $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ y $N(-\tilde{x}, -\tilde{y})$ son simétricos con respecto al punto S. De este modo, todos los puntos de la curva dada están situados a pares, simétricamente con respecto al punto S (fig. 72). En este caso, el punto S se llama centro de simetría o, simplemente, centro de la curva dada. Ahora queda claro el significado geométrico de la transformación efectuada: el origen de coordenadas ha sido trasladado al centro de la curva.

Hagamos ahora girar los ejes trasladados en un ángulo α. De acuerdo al § 9 obtenemos la transformación correspondiente de coordenadas:

$$\tilde{x}=x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha,$$
$$\tilde{y}=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha. \tag{8}$$

Sustituyamos las cantidades $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, en el primer miembro de la ecuación (7), por sus expresiones (8); después de reducir los términos semejantes se tiene:

$$17\tilde{x}^2+12\tilde{x}\tilde{y}+8\tilde{y}^2-20=(17\cos^2\alpha+12\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha+8\operatorname{sen}^2\alpha)\,x'^2+$$
$$+2\,(-17\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha+6\cos^2\alpha-6\operatorname{sen}^2\alpha+8\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)\,x'y'+$$
$$+(17\operatorname{sen}^2\alpha-12\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha+8\cos^2\alpha)\,y'^2-20. \tag{9}$$

Procuremos elegir el ángulo α de tal modo, que se convierta en cero el coeficiente de $x'y'$. Para eso será necesario resolver la ecuación trigonométrica:

$$-17\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha+6\cos^2\alpha-6\operatorname{sen}^2\alpha+8\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha=0,$$

o sea, la ecuación,

$$6\operatorname{sen}^2\alpha+9\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-6\cos^2\alpha=0.$$

De aquí, que

$$6\operatorname{tg}^2\alpha+9\operatorname{tg}\alpha-6=0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenida respecto a $\operatorname{tg}\alpha$, hallamos: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ o $\operatorname{tg}\alpha=-2$. Tomemos la primera solución que corresponde a una rotación de los ejes coordenados en un ángulo agudo. Conociendo $\operatorname{tg}\alpha$ calculamos $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$
$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

De aquí y teniendo en cuenta la igualdad (9), hallamos la ecuación de la curva dada en el sistema x', y':

$$20x'^2+5y'^2-20=0$$

o sea,

$$\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

Hemos obtenido la ecuación canónica de una elipse de semiejes 2 y 1 (el eje mayor de la elipse está situado en el eje Oy'; véase la fig. 73).

115. Si se da una curva de segundo orden en general:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

las ecuaciones que determinan su centro $S(x_0;\ y_0)$ se escriben así:

$$\begin{aligned} Ax_0+By_0+D=0,\\ Bx_0+Cy_0+E=0. \end{aligned} \qquad (10)$$

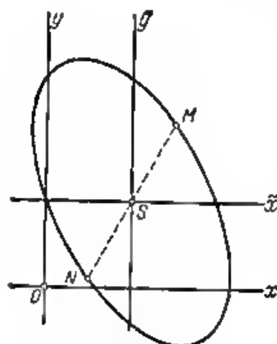


Fig. 72.

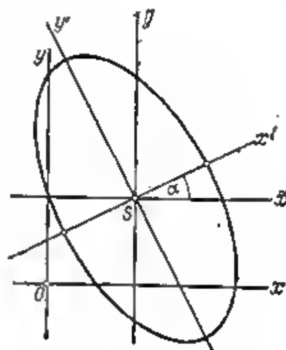


Fig. 73.

Después de trasladar el origen de coordenadas al centro S, la ecuación de la curva dada toma la forma:

$$A\tilde{x}^2+2B\tilde{x}\tilde{y}+C\tilde{y}^2+\tilde{F}=0, \qquad (11)$$

en donde

$$\tilde{F}=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F.$$

Aplicando la identidad (2), se tiene

$$\tilde{F}=(Ax_0+By_0+D)\,x_0+(Bx_0+Cy_0+E)\,y_0+ \\ +(Dx_0+Ey_0+F).$$

Si x_0, y_0 son las coordenadas del centro de la curva, teniendo en cuenta las igualdades (10), hallamos:

$$\tilde{F}=Dx_0+Ey_0+F.$$

Para obtener las ecuaciones (10) y (11) es necesario repetir en forma general los cálculos con los que obtuvimos las ecuaciones (6) y (7), cuando considerábamos el ejemplo anterior.

116. Puede ocurrir que el sistema de ecuaciones (10) sea incompatible, es decir, que no tenga solución. En este caso, la curva no tiene centro. Entonces, la simplificación de la ecuación dada se debe efectuar de otro modo.

Ejemplo. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0. \tag{12}$$

Solución. Considerando las ecuaciones (10)

$$4x_0-2y_0-1=0,$$
$$-2x_0+y_0-7=0,$$

vemos que el sistema obtenido es incompatible. Por lo tanto, la curva dada no tiene centro y no podemos obrar como en el nº 114.

Procedamos de otro modo. Sin cambiar el origen de coordenadas, hagamos girar los ejes en un ángulo α. De acuerdo al § 9, obtenemos las fórmulas de la transformación correspondiente de coordenadas:

$$x=x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha,$$
$$y=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha.$$

Pasemos a las nuevas coordenadas en el primer miembro de la ecuación (12):

$$\begin{aligned}4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7&=(4\cos^2\alpha-4\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha)x'^2+\\&+2(-4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+2\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)x'y'+\\&+(4\operatorname{sen}^2\alpha+4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)y'^2+\\&+2(-\cos\alpha-7\operatorname{sen}\alpha)x'+2(\operatorname{sen}\alpha-7\cos\alpha)y'+7.\end{aligned} \tag{13}$$

Procuremos ahora elegir el ángulo α de tal manera, que se anule el coeficiente de $x'y'$. Para eso tendremos que resolver la ecuación trigonométrica

$$-4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+2\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=0.$$

Tenemos

$$2\operatorname{sen}^2\alpha-3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0,$$

o sea,

$$2\operatorname{tg}^2\alpha-3\operatorname{tg}\alpha-2=0.$$

De aquí que $\operatorname{tg}\alpha=2$, o $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$. Tomemos la primera solución, la cual corresponde a una rotación de los ejes en un ángulo agudo. Conociendo $\operatorname{tg}\alpha$, calculamos $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \operatorname{sen}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

De aquí y teniendo en cuenta la igualdad (13), hallamos la ecuación de la curva dada en el sistema x', y':

$$5y'^2-6\sqrt{5}x'-2\sqrt{5}y'+7=0. \tag{14}$$

La reducción ulterior de la ecuación (14) se realiza mediante un traslado paralelo de los ejes Ox', Oy'.

Escribamos la ecuación (14) del modo siguiente:

$$5\left(y'^2-2\frac{\sqrt{5}}{5}y'\right)-6\sqrt{5}x'+7=0.$$

Completando el cuadrado de la diferencia dentro del paréntesis, obtenemos:

$$\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \frac{6\sqrt{5}}{5}\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 0.$$

Introduzcamos ahora unas coordenadas nuevas x'', y'', poniendo

$$x' = x'' + \frac{\sqrt{5}}{5}, \qquad y' = y'' + \frac{\sqrt{5}}{5},$$

lo cual corresponde a un traslado paralelo de los ejes en la magnitud $\frac{\sqrt{5}}{5}$ en dirección del eje Ox' y en la magnitud $\frac{\sqrt{5}}{5}$ en dirección del eje Oy'. La ecuación de la línea dada en coordenadas x'', y'' es de la forma:

$$y''^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}x''.$$

Esta es la ecuación canónica de una parábola cuyo parámetro es $p = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ y con el vértice en el origen de coordenadas del sistema x'', y''. La parábola está situada

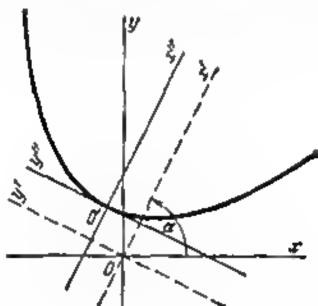


Fig. 74.

simétricamente con respecto al eje x'' y se extiende indefinidamente en la dirección positiva de este eje. Las coordenadas del vértice en el sistema x', y' son $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, y en el sistema x, y, son $\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$. La situación de la parábola está expuesta en la fig. 74.

117. Analicemos nuevamente el sistema de ecuaciones (10) que determinan el centro de la curva dada:

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{aligned} \qquad (10)$$

Designemos por δ el determinante de este sistema:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Si $\delta \neq 0$, el sistema (10) tiene solución única (véase Apéndice, § 1). En este caso, la curva dada de segundo orden tiene un centro único y se llama *central*. Las elipses y las hipérbolas son curvas centrales. Pero puede ocurrir que siendo $\delta \neq 0$, la ecuación dada se reduzca a una forma canónica parecida a la forma canónica de la ecuación de la elipse o a la forma canónica de la ecuación de la hipérbola, pero que, sin embargo, no coincida por completo ni con ésta ni con aquélla. Ahora veremos ejemplos de este género. Indiquemos previamente que, si $\delta \neq 0$, la ecuación general de segundo grado siempre se puede simplificar procediendo justamente así como se ha señalado en el ejemplo del nº 114. Por eso, en los ejemplos expuestos más adelante, no se indicará el método de transformación.

Ejemplo 1. La ecuación

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y + 12 = 0$$

($\delta = 9 \neq 0$), se reduce a la forma canónica

$$x'^2 + 4y'^2 + 4 = 0,$$

o sea,

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = -1.$$

Esta ecuación es parecida a la ecuación canónica de la elipse. Sin embargo, no determina en el plano ninguna figura geométrica, puesto que para cualesquiera números reales x', y' su primer miembro no es negativo, y el segundo miembro es -1. Esta ecuación y las ecuaciones semejantes se llaman ecuaciones de una *elipse imaginaria*.

Ejemplo 2. La ecuación

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$$

($\delta = 9 \neq 0$), se reduce a la forma canónica

$$x'^2 + 4y'^2 = 0,$$

o sea,

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 0. \qquad (*)$$

La ecuación (*) también se parece a la ecuación canónica de la elipse, pero no determina una elipse, sino un punto único: $x' = 0$, $y' = 0$. Esta ecuación y las ecuaciones semejantes se llaman ecuaciones de una *elipse degenerada*. Para dar una explicación al motivo de esta denominación, consideremos la ecuación

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = \varepsilon^2, \qquad (**)$$

en donde ε es un número arbitrario ($\varepsilon > 0$). La ecuación (**) determina una elipse ordinaria de semiejes $a = 2\varepsilon$, $b = \varepsilon$. Figurémonos que ε tiende a cero. Entonces, $a \longrightarrow 0$, $b \longrightarrow 0$ y la elipse «degenera» en un punto (fig. 75). A la vez la ecuación (**) se convierte en la ecuación (*).

Ejemplo 3. La ecuación

$$3x^2+10xy+3y^2+16x+16y+16=0$$

($\delta=-16\neq 0$) se reduce a la forma canónica

$$x'^2-4y'^2=0,$$

o sea,

$$\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{1}=0. \qquad (*)$$

La ecuación (*) es parecida a la ecuación canónica de la hipérbola; ésta determina un par de rectas secantes: $x'-2y'=0$, $x'+2y'=0$. Tal ecuación y las ecuaciones semejantes se llaman ecuaciones de una *hipérbola degenerada*.

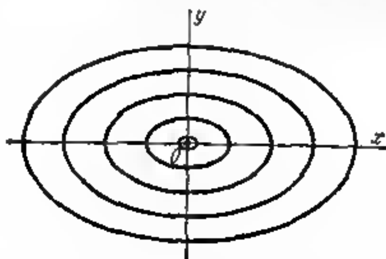


Fig. 75.

Para explicar el motivo de esta denominación consideremos la ecuación

$$\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{1}=\varepsilon^2, \qquad (**)$$

en donde ε es un número arbitrario ($\varepsilon>0$). La ecuación (**) determina una hipérbola ordinaria de semiejes $a=2\varepsilon$, $b=\varepsilon$, cuyos vértices están en el eje de abscisas. Figurémonos que ε tiende a cero. Entonces, $a\to 0$, $b\to 0$, los vértices de la hipérbola se aproximan uno a otro y la hipérbola "degenera" en un par de rectas, precisamente, en su par de asíntotas. A su vez, la ecuación (**) se convierte en la ecuación (*). Si en la ecuación (**) sustituimos ε^2 por $-\varepsilon^2$ se obtiene una hipérbola con los vértices en el eje de ordenadas. Para $\varepsilon\to 0$, esta hipérbola degenera en el mismo par de rectas (fig. 76).

Supongamos ahora que para la ecuación general dada de segundo grado se tiene $\delta=0$. Para la condición $\delta=0$ se pueden presentar dos casos:

1) El sistema de ecuaciones (10) no tiene ninguna solución; entonces, la curva de segundo orden no tiene centro. En este caso, la ecuación dada siempre se puede reducir a la forma canónica, así como se ha visto en el ejemplo nº 116, y, como resultado, siempre se obtendrá la ecuación canónica de la parábola.

2) El sistema de ecuaciones (10) tiene una infinidad de soluciones; entonces, la línea dada de segundo orden tiene una infinidad de centros.

Ejemplo 4. Consideremos la línea de segundo orden

$$4x^2-4xy+y^2+4x-2y-3=0; \qquad (*)$$

para ella, $\delta = 0$. En este caso, el sistema (10) será

$$4x_0 - 2y_0 + 2 = 0,$$
$$-2x_0 + y_0 - 1 = 0.$$

Este sistema es equivalente a la ecuación $2x_0 - y_0 + 1 = 0$, y, por lo tanto, la línea tiene una infinidad de centros, que forman la recta $2x - y + 1 = 0$. Obsérvese, que el primer miembro de la ecuación considerada se descompone en factores de primer grado:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = (2x - y + 3)(2x - y - 1).$$

Por consiguiente, la línea considerada representa un par de rectas paralelas:

$$2x - y + 3 = 0 \text{ y } 2x - y - 1 = 0.$$

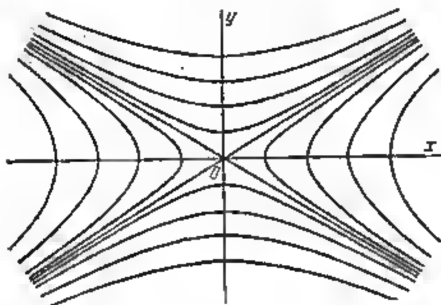


Fig. 76.

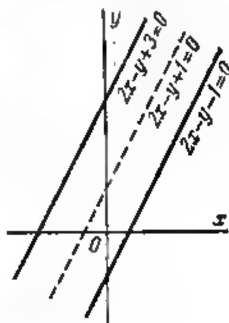


Fig. 77.

La recta $2x - y + 1 = 0$, formada por los centros, representa la línea media de este par de rectas (fig. 77).

Para simplificar la ecuación dada (*) se puede proceder del mismo modo que en el nº 116. Efectuando una transformación del primer miembro de la ecuación, tal y como se hizo con la ecuación (13), y repitiendo las razones y cálculos consiguientes, hallamos que $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Girando los ejes en el ángulo α ($\operatorname{tg} \alpha = 2$), reducimos la ecuación dada a la forma

$$5y'^2 - 2\sqrt{5}\,y' - 3 = 0;$$

y de aquí,

$$5\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 4 = 0.$$

Poniendo $x' = x''$, $y' = y'' + \frac{\sqrt{5}}{5}$, lo cual corresponde a un traslado paralelo de los ejes Ox', Oy' en la magnitud $\frac{\sqrt{5}}{5}$ en dirección del eje Oy', se tiene finalmente:

$$5y''^2 - 4 = 0.$$

Vemos de nuevo, que la ecuación dada determina un par de rectas paralelas ($\sqrt{5}y'' - 2 = 0$ y $\sqrt{5}\,y'' + 2 = 0$ en el último sistema coordenado).

Cuando la ecuación de segundo grado representa una línea de segundo orden con una infinidad de centros (como en el último ejemplo), se dice que es la ecuación de una *parábola degenerada*.

118. Los ejemplos estudiados muestran de una manera convincente, que siempre se puede reducir la ecuación general de la curva de segundo orden a la forma canónica. Véase la demostración exacta de esta afirmación en nuestro libro «Formas cuadráticas y matrices».

§ 42. La hipérbola como gráfica de la proporcionalidad inversa. La parábola como gráfica del trinomio cuadrático

119. Frecuentemente aparece en las matemáticas y en sus aplicaciones la ecuación de la forma $xy = m$, o sea, $y = \frac{m}{x}$ $(m = \text{const} \neq 0)$; *ésta se llama ecuación de la proporcionalidad inversa de las magnitudes* x *e* y. Es fácil demostrar que esta ecuación representa, en coordenadas cartesianas rectangulares x, y, *una hipérbola equilátera, cuyas asíntotas coinciden con los ejes coordenados.*

En efecto, hagamos girar los ejes Ox y Oy en el ángulo $\alpha = 45°$. Entonces, las coordenadas de todos los puntos del plano se transforman según las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \\ y &= x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Transformando la ecuación $xy = m$ según las fórmulas (1), se obtiene en nuevas coordenadas

$$\frac{x'^2}{2m} - \frac{y'^2}{2m} = 1.$$

Vemos pues, que ésta es la ecuación canónica de una hipérbola equilátera cuyos semiejes son $a = b = \sqrt{2|m|}$; sus asíntotas tienen una inclinación de 45° con los nuevos ejes coordenados y, por lo tanto, coinciden con los ejes primitivos; si el número m es positivo, la hipérbola considerada se corta con el nuevo eje de abscisas; si m es negativo, se corta con el nuevo eje de ordenadas. De aquí se deduce, como ya lo afirmábamos anteriormente, que la ecuación $xy = m$ determina una hipérbola equilátera cuyas asíntotas coinciden con los ejes coordenados; la hipérbola está situada en el primero y tercer cuadrantes coordenados, si $m > 0$ (fig. 78, *a*), y en el segundo y cuarto cuadrantes coordenados, si $m < 0$ (fig. 78, *b*).

De lo expuesto se deduce, *que la hipérbola equilátera es la gráfica de la proporcionalidad inversa.*

120. La ecuación

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \qquad (2)$$

determina una parábola cuyo eje de simetría es perpendicular al eje de abscisas; esta parábola será ascendente, si $a > 0$ y descendente, si $a < 0$.

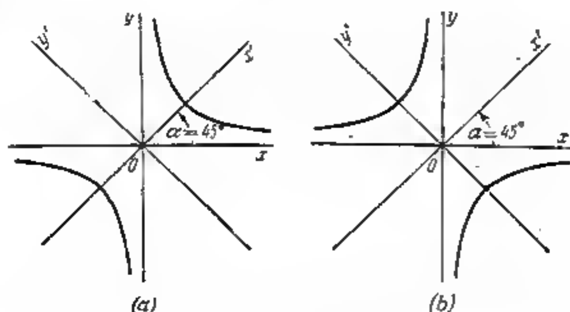


Fig. 78.

Para demostrar lo dicho es suficiente reducir la ecuación (2) a la forma canónica. Con este fin, vamos a modificar su escritura del modo siguiente:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c,$$

o sea,

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}, \tag{3}$$

es decir,

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Traslademos ahora el origen de coordenadas al punto $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Entonces, las coordenadas de todos los puntos del plano se transforman de acuerdo a las fórmulas

$$x = \bar{x} - \frac{b}{2a}, \qquad y = \bar{y} + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

y la ecuación (3) en las nuevas coordenadas toma la forma

$$\bar{y} = a\bar{x}^2,$$

o sea,

$$\bar{x}^2 = \pm 2p\bar{y}, \tag{4}$$

en donde p es un número positivo definido por la igualdad $\pm p = \frac{1}{2a}$.

Hemos obtenido la ecuación canónica de la parábola con el vértice

en el nuevo origen de coordenadas y situada simétricamente con respecto al nuevo eje de ordenadas. Esta parábola es ascendente o descendente, según que el número $a=\frac{1}{\pm 2p}$ sea positivo o negativo. Como el nuevo eje de ordenadas es perpendicular al eje primitivo

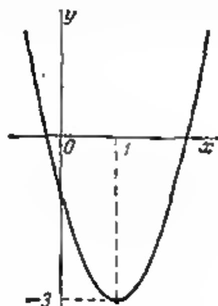


Fig. 79.

de abscisas, la parábola considerada está situada precisamente como lo hemos indicado. De este modo queda demostrada nuestra afirmación.

121. La expresión ax^2+bx+c se llama *trinomio cuadrático* del argumento x. De acuerdo a esto, podemos decir que la *parábola* (con eje vertical) *es la gráfica del trinomio cuadrático.*

Ejemplo. La ecuación $y=2x^2-4x-1$ determina una parábola ascendente, puesto que $a=2>0$. Para determinar su vértice, escribamos la ecuación dada así: $y+3=2(x-1)^2$. Para reducir esta ecuación a la forma canónica es necesario trasladar el origen de coordenadas al punto $(1;\ -3)$. Este punto es el vértice de la parábola considerada (fig. 79).

II

Parte

GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO

7.

ALGUNOS PROBLEMAS ELEMENTALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO

§ 43. Coordenadas cartesianas rectangulares en el espacio

122. Si se ha indicado un método que permita establecer la posición de los puntos del espacio mediante números, se dice que en el espacio se ha introducido un sistema de coordenadas. Veremos a continuación el sistema de coordenadas más usual y más simple, llamado cartesiano rectangular.

El sistema cartesiano de coordenadas rectangulares en el espacio se define por una unidad lineal para la medida de longitudes y por tres rectas, perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto y que están numeradas en cierto orden (es decir, que se ha indicado cuál de ellas se toma por primera, cuál por segunda y cuál por tercera).

El punto de intersección de los ejes se llama *origen de coordenadas*, los mismos ejes se llaman *ejes coordenados*, además, el primero de ellos se llama también *eje de abscisas*, el segundo, *eje de ordenadas*, y el tercero, *eje de cotas*.

El origen de coordenadas lo designaremos con la letra O, el eje de abscisas, con las letras Ox, el eje de ordenadas, con las letras Oy, y el eje de cotas, con las letras Oz. En las figuras, las letras x, y, z se colocan al lado de los ejes correspondientes, en la dirección positiva, partiendo del punto O, en el lugar donde se interrumpen las representaciones de los ejes; de este modo, la misma situación de las letras señala la dirección de cada eje.

Sea M un punto arbitrario del espacio; proyectemos el punto M sobre los ejes coordenados, es decir, bajemos desde el punto M perpendiculares a las rectas Ox, Oy y Oz. Designemos los pies de estas perpendiculares con M_x, M_y y M_z, respectivamente.

Se llaman coordenadas del punto M, en el sistema dado,

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \quad z = OM_z,$$

a los números en donde OM_x *es la magnitud del segmento* $\overline{OM_x}$ *del eje de abscisas,* OM_y *es la magnitud del segmento* $\overline{OM_y}$ *del eje de ordenadas y* OM_z *es la magnitud del segmento* $\overline{OM_z}$ *del eje de cotas* (en el nº 2 se explicó qué se entiende por magnitud de un segmento del eje). *El número x se llama primera coordenada o abscisa del punto M, el número y se llama segunda coordenada u ordenada del punto M, el número z se llama tercera coordenada o cota del punto M.* Las coordenadas se escriben en el texto entre paréntesis, junto a la letra que designa el mismo punto: $M(x; y; z)$.

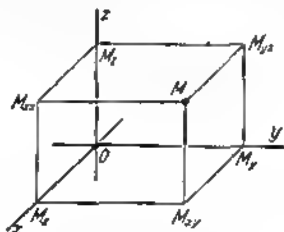


Fig. 80.

La proyección del punto M sobre el eje Ox se puede obtener también bajando desde el punto M una perpendicular al plano Oxy y bajando después una perpendicular al eje Ox desde el pie de ella, el cual designaremos mediante M_{xy}; el pie de esta última perpendicular será M_x; o sea, M_x es la proyección del punto M_{xy} sobre el eje Ox. Es evidente que M_y es la proyección del punto M_{xy} sobre el eje Oy.

Análogamente, si M_{xz} y M_{yz} son los pies de las perpendiculares bajadas del punto M a los planos Oxz y Oyz, respectivamente, proyectando M_{xz} y M_{yz} sobre los ejes coordenados, obtenemos los puntos M_x, M_y y M_z (cada uno de los puntos M_x, M_y, M_z se obtiene de dos maneras; por ejemplo, el punto M_x es la proyección sobre el eje Ox del punto M_{xy}, así como del punto M_{xz}).

Los puntos M_x, M_y, M_z, M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} y O son los vértices de un paralelepípedo rectangular cuyos lados, tomados con los signos apropiados, son las coordenadas del punto M. Este paralelepípedo está representado en la fig. 80.

123. Si se ha dado un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares, cada punto del espacio tiene en este sistema una terna determinada de coordenadas x, y, z. Recíprocamente, cualesquiera que sean los tres números (reales) x, y, z, siempre hay en el espacio un punto determinado cuya abscisa es igual a x, cuya ordenada es igual a y y cuya cota es igual a z. Para trazar el punto,

conociendo sus coordenadas x, y, z, es necesario marcar, partiendo del origen de coordenadas, un segmento $\overline{OM_x}$ de magnitud x en el eje de abscisas Ox, un segmento $\overline{OM_y}$ de magnitud y en el eje de ordenadas Oy, y un segmento $\overline{OM_z}$ de magnitud z en el eje de cotas Oz. Trazando, después, un plano por M_x, perpendicular al eje Ox, un plano por M_y, perpendicular al eje Oy, y un plano por M_z, perpendicular al eje Oz, se obtiene el punto buscado como punto de intersección de los planos trazados.

124. Convengamos sobre algunos términos (suponiendo que los ejes se han dado como en la fig. 80).

El plano Oyz divide todo el espacio en dos semiespacios; el que está situado en la dirección positiva del eje Ox lo llamaremos *anterior*, al otro, *posterior*.

Asimismo, el plano Oxz divide todo el espacio en dos semiespacios; el que está situado en la dirección positiva del eje Oy lo llamaremos de la *derecha*, al otro, de la *izquierda*.

Finalmente, el plano Oxy divide todo el espacio en dos semiespacios; al que está situado en la dirección positiva del eje Oz lo llamaremos *superior*, al otro, *inferior*.

125. Sea M un punto arbitrario del semiespacio anterior; en este caso, el segmento $\overline{OM_x}$ tiene en el eje Ox la dirección positiva y, por consiguiente, la abscisa $x = OM_x$ del punto M es positiva. Si el punto M está situado en el semiespacio posterior, el segmento $\overline{OM_x}$ tiene en el eje Ox la dirección negativa y el número $x = OM_x$ es negativo. Por último, cuando el punto M está situado en el plano Oyz, su proyección M_x sobre el eje Ox coincide con el punto O y $x = OM_x$ es igual a cero.

Resumiendo, *todos los puntos del semiplano anterior tienen abscisas positivas* ($x > 0$); *todos los puntos del semiespacio posterior tienen abscisas negativas* ($x < 0$); *las abscisas de los puntos situados en el plano Oyz son iguales a cero* ($x = 0$).

Con un razonamiento análogo, es fácil establecer *que todos los puntos del semiespacio de la derecha tienen ordenadas positivas* ($y > 0$); *todos los puntos del semiespacio de la izquierda tienen ordenadas negativas* ($y < 0$); *las ordenadas de los puntos situados en el plano Oxz son iguales a cero* ($y = 0$).

Finalmente, *todos los puntos del semiespacio superior tienen cotas positivas* ($z > 0$); *todos los puntos del semiespacio inferior tienen cotas negativas* ($z < 0$); *las cotas de los puntos situados en el plana Oxy son iguales a cero* ($z = 0$).

Teniendo en cuenta que los puntos del plano Oxz se caracterizan por la igualdad $y = 0$, y los puntos del plano Oxy, por la igualdad $z = 0$, deducimos *que los puntos del eje Ox se caracterizan par las dos igualdades*

$$y = 0, \quad z = 0.$$

Análogamente, *los puntos del eje Oy se caracterizan por las dos igualdades*

$$x=0, \quad z=0,$$

y los puntos del eje Oz, por las dos igualdades

$$x=0, \quad y=0.$$

Señalemos que el origen de coordenadas O, como punto de intersección de los ejes, tiene las tres coordenadas iguales a cero: $x=0$, $y=0$, $z=0$, y se distingue precisamente por esto (es decir, las tres coordenadas son iguales a cero solamente para el punto O).

126. Los tres planos Oxy, Oxz y Oyz, dividen el espacio en ocho partes: éstas se llaman *octantes coordenados* y se enumeran en un orden determinado. Con más precisión, se llama primer octante al que está situado en los semiespacios anterior, de la derecha y superior; segundo, al que está situado en los semiespacios posterior, de la derecha y superior; tercero, al que está situado en los semiespacios posterior, de la izquierda y superior; cuarto, al que está situado en los semiespacios anterior, de la izquierda y superior; el quinto, sexto, séptimo y octavo octantes son los que están situados en el semiespacio inferior, bajo el primero, segundo, tercero y cuarto octantes, respectivamente.

Sea M un punto con las coordenadas x, y, z. De lo anterior se deduce que

si $x>0$, $y>0$, $z>0$, el punto M está situado en el primer octante;
si $x<0$, $y>0$, $z>0$, el punto M está situado en el segundo octante;
si $x<0$, $y<0$, $z>0$, el punto M está situado en el tercer octante;
si $x>0$, $y<0$, $z>0$, el punto M está situado en el cuarto octante;
si $x>0$, $y>0$, $z<0$, el punto M está situado en el quinto octante;
si $x<0$, $y>0$, $z<0$, el punto M está situado en el sexto octante;
si $x<0$, $y<0$, $z<0$, el punto M está situado en el séptimo octante;
si $x>0$, $y<0$, $z<0$, el punto M está situado en el octavo octante.

El estudio de los semiespacios coordenados y de los octantes es útil, puesto que ayuda a orientarse fácilmente en la situación de los puntos dados por los signos de sus coordenadas.

§ 44. Noción de vector libre. Proyección de un vector sobre un eje

127. Por el curso elemental de física, el lector sabe que algunas cantidades físicas, como la temperatura, la masa, la densidad, se llaman escalares. Otras cantidades, como, por ejemplo, la fuerza, el desplazamiento de un punto, la velocidad, la aceleración, se llaman vectoriales.

Toda cantidad escalar se puede caracterizar por un número que exprese la relación entre este cantidad y la unidad correspondiente de medida. Por el contrario, para caracterizar una cantidad vectorial resulta insuficiente el número; su explicación estriba en que las cantidades vectoriales, además de medida, tienen también dirección.

Los vectores geométricos sirven para la expresión abstracta de las cantidades vectoriales concretas (físicas).

Los segmentos dirigidos se llaman *vectores geométricos* o simplemente *vectores*.

Los vectores geométricos son objeto de estudio del llamado cálculo vectorial, del mismo modo que los números son objeto de estudio de la aritmética. En el cálculo vectorial se efectúan operaciones con los vectores; éstas son abstracciones matemáticas de operaciones uniformes realizadas en física con diversas cantidades vectoriales concretas.

El cálculo vectorial, que se creó para satisfacer las necesidades de la física, resultó ser de provecho para la misma matemática. En este libro se emplean los vectores, como uno de los útiles de la geometría analítica.

El siguiente capítulo está dedicado a exponer los conceptos primarios del cálculo vectorial. En los apartados inmediatos se estudian solamente las proposiciones puramente geométricas más simples sobre los segmentos dirigidos del espacio.

Sin embargo, resulta más lógico introducir aquí algunos conceptos, notaciones y términos empleados en el cálculo vectorial.

128. El vector, como segmento dirigido, lo vamos a designar en el texto, como lo hicimos anteriormente, con dos letras mayúsculas y una rayita común por encima, de modo que la primera letra denota el origen y, la segunda, el extremo del vector. Además, a menudo, emplearemos la notación del vector con una letra minúscula en negrita (por ejemplo, $\mathbf{a}$). En la figura, el vector siempre lo representaremos en forma de una flecha; si el vector se ha designado con una letra, ésta, en la figura, se colocará junto al extremo de la flecha. Frecuentemente, el origen del vector lo llamaremos *punto de aplicación*. El vector, cuyos origen y extremo coinciden, se llama *nulo*. Los vectores situados en una recta o en rectas paralelas, se llaman *colineales*.

129. Definición de igualdad de vectores. *Los vectores se llaman iguales, si son colineales, tienen una misma longitud y una misma dirección.*

En la fig. 81 están representados los vectores iguales $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ ($\overline{AB}=\overline{CD}$)*), en la fig. 82 los vectores desiguales $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ ($\overline{PQ}\neq\overline{PR}$), $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ ($\overline{EF}\neq\overline{GH}$).

Es evidente *que, si dos vectores por separado son iguales a un tercero, los primeros son iguales entre sí.*

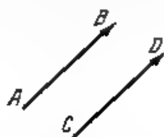


Fig. 81.



Fig. 82.

De la definición de igualdad de los vectores se deduce que cualesquiera que sean el vector $\boldsymbol{a}$ y el punto P, existe un vector $\overline{PQ}$, y solamente uno, con el origen en P e igual al vector $\boldsymbol{a}$; dicho de otro modo, para cada vector, el punto de aplicación puede ser elegido en donde se quiera. Correspondientemente a esto, en geometría los vectores se consideran sin tener en cuenta su punto de aplicación (es decir, sin distinguir los vectores iguales, que se obtienen uno de otro mediante un traslado paralelo). En este sentido, los vectores se llaman *libres*.

130. La *longitud del vector* (dada la unidad de medida) *se llama módulo*. El módulo del vector nulo es igual a cero. Para el módulo del vector $\boldsymbol{a}$ se emplean las notaciones $|\boldsymbol{a}|$ o a. Evidentemente, si $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, entonces será $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$; claro está que una conclusión recíproca sería inadmisible.

131. Dados un eje arbitrario u y un vector $\overline{AB}$, bajemos de los puntos A y B perpendiculares al eje u, y designemos por A' y B' los pies correspondientes de ellas. *El número $A'B'$, es decir, la magnitud del segmento dirigido $\overline{A'B'}$ del eje u es la proyección del vector $\overline{AB}$ sobre el eje u:*

$$\text{pr}_u\,\overline{AB}=A'B'.$$

En la fig. 83 se enseña la construcción de la proyección del vector $\overline{AB}$ sobre el eje u, donde, para mayor claridad, se han trazado por los puntos A y B dos planos α y β perpendiculares al eje u. Los puntos A' y B' son las intersecciones de estos planos con el

*) Se supone que estos vectores están situados en el plano de la figura.

eje u (como los planos α y β son perpendiculares al eje u, las rectas AA' y BB' serán perpendiculares a este eje).

132. Tomemos en el espacio un punto arbitrario S y tracemos dos rayos por él: uno en dirección del vector $\overline{AB}$ y otro en dirección del eje u (fig. 83). El ángulo φ formado por estos rayos se llama *ángulo de inclinación* del vector $\overline{AB}$ con el eje u. Es evidente que para la construcción del ángulo φ, la elección del punto S es indiferente. También es evidente que, al cambiar el eje u por otro eje de la misma dirección, el ángulo φ queda igual.

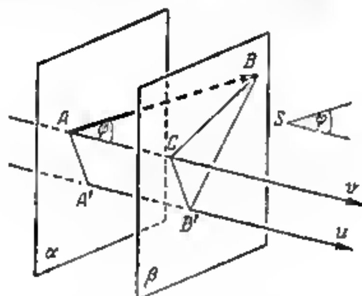


Fig. 83.

Representemos con v al eje que lleva la misma dirección que el eje u y que pasa por el punto A. Por lo expuesto, el ángulo de inclinación del vector AB con el eje v es igual a φ. Sea C el punto de intersección del eje v con el plano β. Como el eje v es paralelo al eje u, y este último es perpendicular al plano β, el eje v es perpendicular al plano β. Por lo tanto, AC es la proyección del vector $\overline{AB}$ sobre el eje v. Como los ejes u y v son paralelos y tienen la misma dirección, sus segmentos comprendidos entre los planos paralelos α y β tienen la misma magnitud: $A'B' = AC$. De aquí que

$$\text{pr}_u \overline{AB} = \text{pr}_v \overline{AB}. \quad (1)$$

Por otra parte, como el vector $\overline{AB}$ y el eje v están situados en un mismo plano, podemos aplicar la fórmula (7) nº 20; de esto modo

$$\text{pr}_v \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \varphi. \quad (2)$$

De las fórmulas (1) y (2) se deduce que

$$\text{pr}_u \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \varphi. \quad (3)$$

Si, para abreviar, designamos el vector $\overline{AB}$ con una sola letra $\boldsymbol{a}$, la fórmula (3) toma la forma:

$$\text{pr}_u \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos \varphi \qquad (4)$$

Así pues, *la proyección de un vector sobre un eje es igual a su módulo, multiplicado por el coseno del ángulo de inclinación del vector con este eje.*

133. Consideremos dos vectores iguales $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{A_2B_2}$ y algún eje u. Como vectores iguales tienen módulos iguales y forman con el eje u ángulos iguales, aplicando a cada uno de ellos la fórmula (3), se obtienen resultados iguales:

$$\text{pr}_u \overline{A_1B_1} = \text{pr}_u \overline{A_2B_2}.$$

De este modo, *vectores iguales tienen proyecciones iguales sobre un mismo eje.*

§ 45. Proyecciones de un vector sobre los ejes coordenados

134. Supongamos que se ha dado en el espacio un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares.

Consideremos un vector arbitrario $\boldsymbol{a}$. Sea X la proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre el eje Ox; Y, la proyección del mismo vector sobre el eje Oy y Z, la proyección sobre el eje Oz.

De acuerdo al nº 133, las proyecciones sobre los ejes coordenados de cualquier vector igual a $\boldsymbol{a}$ son también iguales a los números X, Y y Z.

Recíprocamente, si las proyecciones sobre los ejes coordenados de un vector $\boldsymbol{b}$ son iguales a las del vector $\boldsymbol{a}$, se tiene que $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$. Para demostrar esto, supongamos que el origen de coordenadas es el punto de aplicación de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$; designemos, entonces, los extremos de estos vectores con las letras A y B. Como los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen una misma proyección X sobre el eje Ox, está claro que los puntos A y B tienen que estar situados en un plano perpendicular al eje Ox; precisamente, en un plano que intercepta en el eje Ox un segmento de magnitud X (partiendo del origen de coordenadas). Por razones semejantes, los puntos A y B tienen que estar situados en un plano perpendicular al eje Oy, que intercepta en el eje Oy un segmento de magnitud Y, y también en un plano perpendicular al eje Oz, que intercepta en el eje Oz un segmento de magnitud Z. En estas condiciones, los puntos A y B han de coincidir, puesto que los tres planos indicados se cortan en un solo punto. Por consiguiente,

$$\boldsymbol{b} = \overline{OB} = \overline{OA} = \boldsymbol{a}.$$

Todo lo expuesto pone de manifiesto, *que las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados determinan por completo al vector*, como

vector libre, es decir, independientemente de su posición en el espacio*). Por eso, las proyecciones X, Y, Z, se llaman *coordenadas* (cartesianas) del vector $\boldsymbol{a}$.

A continuación, para expresar que X, Y, Z son las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$, se escribirá:

$$\boldsymbol{a}=\{X;\ Y;\ Z\},$$

considerando al segundo miembro de esta igualdad como una nueva notación del vector.

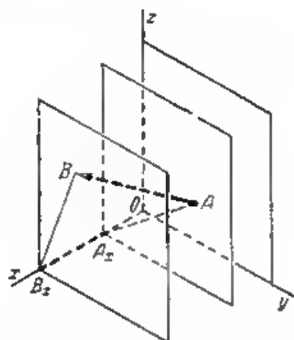


Fig. 84.

135. En geometría analítica, frecuentemente se tienen que calcular las coordenadas de un vector, es decir, las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados, conociendo las coordenadas de su extremo y de su origen. Este problema se resuelve con el teorema siguiente:

Teorema 15. *Cualesquiera que sean los dos puntos* $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *y* $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, *las coordenadas del vector* $\overline{AB}$ *están dadas por las fórmulas*

$$X=x_2-x_1,\quad Y=y_2-y_1,\quad Z=z_2-z_1. \tag{1}$$

Demostración. Bajemos desde los puntos A y B perpendiculares al eje Ox y designemos sus pies mediante A_x, B_x (véase la fig. 84, en donde para mayor claridad se han trazado planos por los puntos A y B, perpendiculares al eje Ox). Las coordenadas de los puntos A_x y B_x en el eje Ox son x_1, x_2. De aquí que por

*) Por lo tanto, queda indeterminado el punto de aplicación del vector (*N del T*).

el teorema 1 (nº 5)

$$A_xB_x = x_2 - x_1.$$

Pero $A_xB_x = X$, por consiguiente, $X = x_2 - x_1$. Análogamente se establecen las fórmulas: $Y = y_2 - y_1$, $Z = z_2 - z_1$.

Por lo tanto, *para obtener las coordenadas de un vector, es necesario restar las coordenadas de su origen de las coordenadas correspondientes de su extremo.*

136. Sea $M(x; y; z)$ un punto arbitrario del espacio. El vector $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$, o sea, *el vector que va del origen de coordenadas al punto M, se llama radio vector de este punto.*

Calculando las coordenadas del vector $\overline{OM}$ mediante las fórmulas (1), o sea, poniendo en las fórmulas indicadas $x_2 = x$, $y_2 = y$, $z_2 = z$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, se tiene:

$$X = x, \ Y = y, \ Z = z,$$

es decir, *las coordenadas del punto M coinciden con las coordenadas de su radio vector $\overline{OM}$.* Hagamos notar que esta última afirmación se deduce, no sólo de las fórmulas (1), sino también de la definición de las coordenadas cartesianas del punto M (véase nº 122).

137. Dado un vector arbitrario $\boldsymbol{a} = \{X; Y; Z\}$, vamos a establecer una fórmula para calcular el módulo del vector $\boldsymbol{a}$, conociendo las coordenadas X, Y, Z de este vector. Para mayor comprensión, se supondrá que el vector $\boldsymbol{a}$ está aplicado al origen de coordenadas.

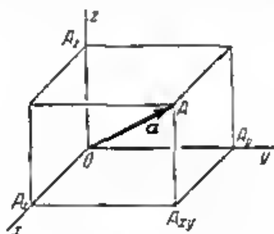


Fig. 85.

Tracemos por el extremo A del vector $\boldsymbol{a}$ planos perpendiculares a los ejes coordenados; los puntos de intersección de estos planos con los ejes los designaremos con A_x, A_y, A_z, respectivamente. Los planos trazados, junto con los planos coordenados, forman un paralelepípedo rectangular, cuya diagonal es el segmento OA (fig. 85). Como bien se sabe por la geometría elemental, el cuadrado de la longitud de la diagonal del paralelepípedo rectangular es igual a

la suma de los cuadrados de las longitudes de tres lados adyacentes. Por consiguiente,

$$OA^2 = OA_x^2 + OA_y^2 + OA_z^2.$$

Pero $OA = |\boldsymbol{a}|$, $OA_x = X$, $OA_y = Y$, $OA_z = Z$; de este modo, de la igualdad anterior, se tiene:

$$|\boldsymbol{a}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

o sea,

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \qquad (2)$$

Esta es la expresión del módulo de un vector arbitrario mediante sus coordenadas.

§ 46. Cosenos directores

138. Designemos con α, β, γ los ángulos formados por el vector $\boldsymbol{a}$ con los ejes coordenados; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se llaman *cosenos directores del vector* $\boldsymbol{a}$. Toman esta denominación porque determinan su dirección.

Si, además de los cosenos directores, se ha dado el módulo del vector, éste queda determinado por completo (como vector libre). En este caso, *las coordenadas del vector se pueden calcular por las fórmulas:*

$$X = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \quad Y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \quad Z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma, \qquad (1)$$

que se verifican según el nº 132.

139. Resumiendo lo expuesto en los dos apartados anteriores llegamos al siguiente teorema:

Teorema 16. *Cualquiera que sea el vector* $\boldsymbol{a}$, *su módulo* $|\boldsymbol{a}|$, *sus cosenos directores* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *y sus coordenadas* X, Y, Z, *están sujetos a las relaciones:*

$$X = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \quad Y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \quad Z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma, \qquad (1)$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \qquad (2)$$

Nota. *Las últimas cuatro fórmulas dan la posibilidad de calcular los cosenos directores de un vector conociendo sus coordenadas.* En efecto, de estas fórmulas se deduce que

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \\ \cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Aquí, las raíces tienen sentido aritmético (como siempre, ante la raíz no se indica el signo).

140. Elevando al cuadrado los dos miembros de cada una de las igualdades (3) y sumando los resultados obtenidos, hallamos:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2};$$

y, por lo tanto,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (4)$$

Mediante la relación (4) se puede calcular cualquiera de los ángulos α, β, γ, si se conocen los otros dos, sabiendo, además, si el ángulo buscado es agudo u obtuso.

§ 47. Distancia entre dos puntos. División de un segmento en una razón dada

141. En la geometría analítica del espacio, así como en la geometría analítica plana, cualquier problema, por muy complicado que sea, siempre se reduce a otros problemas más sencillos. Tales son: el problema de la determinación de la distancia entre dos puntos dados; el de la división de un segmento en una razón dada, el del cálculo del ángulo formado por dos vectores, etc., etc. En este párrafo se resuelven dos de estos problemas.

142. Supongamos que se han dado dos puntos arbitrarios $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, y que se necesita calcular la distancia d entre ellos.

El resultado buscado se obtiene inmediatamente aplicando el teorema 15 (nº 135) y las fórmulas (2) del párrafo anterior.

En efecto, se tiene:

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\};$$

y como d es el módulo del vector $\overline{M_1M_2}$, hallamos,

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}. \qquad (1)$$

Esta es la fórmula que resuelve el problema.

143. Supongamos dados dos puntos arbitrarios $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, siendo necesario hallar en la recta M_1M_2 un punto M que divida al segmento $\overline{M_1M_2}$ en una razón dada λ.

Este problema se resuelve del mismo modo que se resolvió en la geometría analítica plana (véase nº 24). Por eso, nos limitamos a enunciar el resultado: *si x, y, z, son las coordenadas del punto buscado M, entonces*

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

En particular, *para* $\lambda=1$ *se obtienen las coordenadas del punto medio del segmento dado:*

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

144. Para la resolución de otros problemas elementales de geometría analítica del espacio resulta conveniente utilizar operaciones especiales con vectores, llamadas sumas de vectores, producto de un vector por un número, producto escalar de vectores y producto vectorial de vectores. En los tres capítulos siguientes se da la definición y las propiedades fundamentales de estas operaciones.

8.

OPERACIONES LINEALES CON VECTORES

§ 48. Definición de las operaciones lineales

145. Se llaman operaciones lineales con vectores a la suma de vectores y al producto de un vector por un número.

Definición de la suma de dos vectores. *Dados dos vectores* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$, *se llama suma* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ *al vector que va del origen del vector* $\boldsymbol{a}$ *al extremo del vector* $\boldsymbol{b}$, *con la condición de que el vector* $\boldsymbol{b}$ *esté aplicado al extremo del vector* $\boldsymbol{a}$.

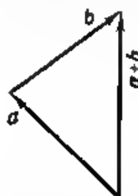


Fig. 86.

En la fig. 86 está representada la suma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Esta regla de la suma de vectores, comprendida en esta definición, se llama generalmente "regla del triángulo".

Observación. Puede ocurrir que, al construir la suma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, aplicando la regla del triángulo, el extremo del vector $\boldsymbol{b}$ coincida con el origen del vector $\boldsymbol{a}$; en este caso, el vector $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ es el vector nulo: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0$.

Definición del producto de un vector por un número. *Dados un vector* $\boldsymbol{a}$ *y un número* α, *designemos sus módulos mediante* $|\boldsymbol{a}|$ *y* $|\alpha|$, *respectivamente. Se llama producto* $\alpha\boldsymbol{a}$ (*o* $\boldsymbol{a}\alpha$) *al vector que es colineal al vector* $\boldsymbol{a}$, *que tiene la longitud igual a* $|\boldsymbol{a}|\cdot|\alpha|$ *y cuya dirección es igual a la del vector* $\boldsymbol{a}$, *si* $\alpha>0$, *y contraria, si* $\alpha<0$.

La operación de determinación del vector $\alpha\boldsymbol{a}$ se llama *producto del vector* $\boldsymbol{a}$ *por el número* α.

Nota 1. Si $\boldsymbol{a}=0$, o si $\alpha=0$, el módulo del producto es igual a cero y, por consiguiente, representa el vector nulo. En este caso, la dirección del producto $\alpha\boldsymbol{a}$ es indeterminada.

Nota 2. El significado de la operación del producto de un vector por un número se puede expresar prácticamente del modo

siguiente: al multiplicar un vector $\boldsymbol{a}$ por un *número* α, *el vector* $\boldsymbol{a}$ *«se alarga» en* α *«veces»*. Claro está, que esta expresión es condicional; por ejemplo, si $\alpha=\frac{1}{2}$, el «alargamiento» en α «veces» significa en realidad una disminución de la longitud del vector $\boldsymbol{a}$ en dos veces; si α es un número negativo, el «alargamiento» en α «veces» significa que el vector se hace $|\alpha|$ veces («módulo de α veces») más largo y que cambia su dirección por la contraria.

§ 49. Propiedades fundamentales de las operaciones lineales

146. Vamos a establecer a continuación las propiedades fundamentales de las operaciones lineales que se utilizan en el cálculo vectorial.

Demostraremos, ante todo, que *la suma de dos vectores cualesquiera no depende del orden de los sumandos:*

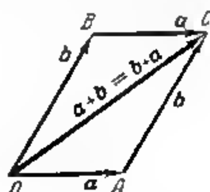


Fig. 87.

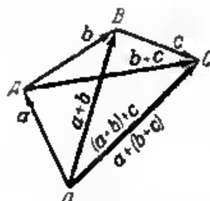


Fig. 88.

Con este fin, consideremos dos vectores arbitrarios $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Como los vectores geométricos son vectores libres, los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se pueden aplicar a un mismo punto O, elegido arbitrariamente. Designemos los extremos de estos vectores mediante A y B (fig. 87). Apliquemos ahora el vector $\boldsymbol{b}$ al punto A, designemos su extremo (en la nueva posición) con la letra C y unamos con un segmento los puntos B y C. Es evidente que el vector $\overline{BC}$ tiene la misma longitud y la misma dirección que el vector $\overline{OA}$; por consiguiente, $\overline{BC}=\boldsymbol{a}$.

Observando la figura OAC y recordando la regla de la suma de vectores («regla del triángulo»), hallamos que $\overline{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Por otra parte, observando la figura OBC, por la misma regla, hallamos que $\overline{OC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$. De aquí que

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}, \tag{1}$$

y la afirmación queda demostrada.

La propiedad de la suma vectorial, expresada por la identidad (1), se llama propiedad *conmutativa*.

Nota. La figura $OABC$ se llama *paralelogramo construido sobre los vectores* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ con el origen común O; el vector $\overline{OC}$ es la diagonal (así se dice, incluso en el caso en que $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$ y $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$ estén situados en una recta, es decir, cuando $OABC$ no es un paralelogramo en el sentido real de la palabra). Como consecuencia de lo expuesto, la regla de la suma de vectores se puede enunciar de un modo nuevo:

Si los vectores $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *tienen un origen común y sobre ellos se ha construido un paralelogramo, la suma* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (o $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$) *es la diagonal de este paralelogramo que va desde el origen común* de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

La expresión de la regla de la suma de vectores, en esta forma, se llama «regla del paralelogramo».

147. Una vez definida la suma de dos vectores, se puede, naturalmente, definir la suma de un número cualquiera de vectores.

Supongamos, por ejemplo, dados tres vectores, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Sumando $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ obtenemos el vector $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Si añadimos ahora el vector $\boldsymbol{c}$, resulta el vector $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$. También se puede construir el vector $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, o sea, agregar al vector $\boldsymbol{a}$ la suma $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

Es fácil demostrar, *que cualesquiera que sean los vectores* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, *se verifica la igualdad*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \quad (2)$$

La propiedad de la suma vectorial expresada por la identidad (2), se llama propiedad *asociativa*.

Para demostrar la propiedad asociativa, situemos los vectores considerados de modo que el vector $\boldsymbol{b}$ quede aplicado al extremo del vector $\boldsymbol{a}$, y el vector $\boldsymbol{c}$, al extremo del vector $\boldsymbol{b}$. En esta situación, designemos por O el origen del vector $\boldsymbol{a}$; con la letra A, su extremo; con la letra B, el extremo del vector $\boldsymbol{b}$ y con la letra C, el extremo del vector $\boldsymbol{c}$ (fig. 88). Entonces,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overline{OA}+\overline{AB})+\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OC},$$
$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overline{OA}+(\overline{AB}+\overline{BC})=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}.$$

Por consiguiente,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

que es lo que se quería demostrar.

Basándose en la propiedad asociativa de la suma de los vectores, podemos ahora hablar de la suma de tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, que se escribirá de la forma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, sin indicar si $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$, o si $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. De modo análogo se puede definir la suma de cuatro, cinco y, en general, de un número cualquiera de vectores.

Para efectuar prácticamente la construcción de la suma de unos cuantos vectores no es necesario realizarla sucesivamente, fijando cada resultado intermedio; la suma de un número cualquiera

de vectores se puede construir inmediatamente aplicando la regla siguiente:

Regla general de la suma de vectores. *Para construir la suma de los vectores* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, *hay que llevar el vector* $\boldsymbol{a}_2$ *al extremo del vector* $\boldsymbol{a}_1$, *el vector* $\boldsymbol{a}_3$, *al extremo del vector* $\boldsymbol{a}_2$, *el vector* $\boldsymbol{a}_4$, *al extremo del vector* $\boldsymbol{a}_3$, *etc., etc., hasta llegar al vector* $\boldsymbol{a}_n$. *Entonces, la suma* $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n$ *será el vector que va desde el origen del vector* $\boldsymbol{a}_1$ *hasta el extremo del vector* $\boldsymbol{a}_n$.

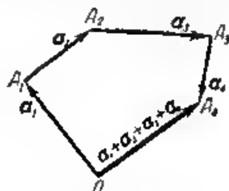


Fig. 89.

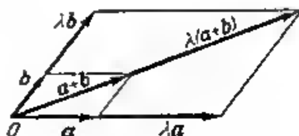


Fig. 90.

Designemos con la letra O el origen del vector $\boldsymbol{a}_1$, con las letras $A_1, A_2, \ldots, A_n$, los extremos respectivos de los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, situados de acuerdo a la regla indicada. La figura $OA_1A_2 \ldots A_n$ se llama línea quebrada (o poligonal) con los lados vectoriales $\overline{OA_1} = \boldsymbol{a}_1$, $\overline{A_1A_2} = \boldsymbol{a}_2, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n} = \boldsymbol{a}_n$; el vector $\overline{OA_n}$ se llama resultante de esta línea. Como

$$\overline{OA_n} = \overline{OA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} = \\ = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n,$$

de acuerdo a esto se dice *que la construcción de la suma se efectúa cerrando la línea quebrada* (en la fig. 89 está representada la construcción de la suma de cuatro sumandos).

Nota. En el nº 146 se ha establecido que la suma de dos vectores no depende del orden de los sumandos. De esto y de la propiedad asociativa de la suma de vectores se deduce, *que la suma de un número cualquiera de vectores tampoco depende del orden de los sumandos.*

148. Señalemos aquí tres propiedades de las operaciones lineales que están relacionadas sucesivamente a la suma de vectores y al producto de un vector por un número. Estas propiedades se expresan mediante las siguientes identidades, en donde λ y μ son números arbitrarios, y $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, son unos vectores cualesquiera:

$$1)\ (\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a},$$
$$2)\ \lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a},$$
$$3)\ \lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.$$

Para que quede clara la subsistencia de la primera identidad es preciso dar su enunciado en términos geométricos: al alargar el vector a en $\lambda+\mu$ veces resulta el mismo vector que al sumar al vector a, alargado en λ veces, el vector a alargado en μ veces *).

Un sentido geométricamente claro tiene también la segunda identidad: al alargar el vector a en μ veces, y después en λ veces, resulta el mismo vector que al alargar el vector a en $\lambda\mu$ veces a la vez.

La tercera identidad se deduce de la teoría de la semejanza de figuras. En efecto, el vector $a+b$ es la diagonal del paralelogramo construido sobre los vectores a y b (suponiendo que los vectores a y b tienen un origen común); al alargar los vectores a, b y $a+b$ en λ veces, este paralelogramo se modifica de una manera semejante y, por consiguiente, se convierte de nuevo en un paralelogramo. Así pues, $\lambda(a+b)$ es la diagonal del paralelogramo construido sobre los vectores λa y λb; de aquí que $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$. (Véase la fig. 90 correspondiente al caso en que $\lambda>0$; se supone que todos los vectores representados en esta figura están aplicados al punto O).

Las propiedades de las operaciones lineales indicadas aquí son de importancia fundamental, puesto que dan la posibilidad de efectuar los cálculos en álgebra vectorial tal y como éstos se efectúan en el álgebra ordinaria. La primera propiedad expresa la posibilidad de «distribuir» el factor vectorial entre los componentes del factor numérico; la tercera propiedad expresa la posibilidad de «distribuir» el factor numérico entre los componentes vectoriales. Por eso, estas propiedades se llaman *distributivas*. Todas las propiedades en su conjunto dan la posibilidad de efectuar el producto de un polinomio escalar por un polinomio vectorial «*término a término*».

La segunda propiedad da la posibilidad de «asociar» los factores numéricos al multiplicar sucesivamente un vector por unos cuantos números (por ejemplo, $2(5a)=10a$). Por eso, la segunda propiedad se llama *asociativa*.

§ 50. Diferencia de vectores

149. En álgebra vectorial se considera la operación de sustracción de vectores; del mismo modo que en la aritmética, ésta es la operación inversa de la adición.

Sean dados dos vectores arbitrarios a y b. *Se llama diferencia* $b-a$, a un *vector tal que, al sumarlo con el vector* a, *resulta el vector* b.

Apliquemos los vectores a y b a un origen común O, después de lo cual designaremos sus extremos con las letras A y B (fig. 91).

*) El «alargamiento» se entiende aquí en el sentido dado en la nota 2 nº 145.

Vamos a buscar la diferencia $b-a$. Supongamos que el vector buscado está aplicado al punto A; entonces, su extremo tiene que coincidir con el punto B, puesto que al sumarlo con el vector $a=\overline{OA}$ tiene que resultar el vector $b=\overline{OB}$.

De este modo, la diferencia $b-a$ no es otra cosa que el vector $\overline{AB}$:

$$b-a=\overline{AB}.$$

Asi pues, *la diferencia de dos vectores, aplicados a un origen común, es un vector que va desde el extremo del vector «sustraendo» hasta el extremo del vector «minuendo».*

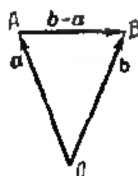


Fig. 91.



Fig. 92.

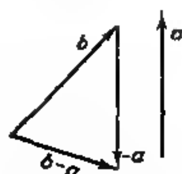


Fig. 93.

150. Además del vector arbitrario a, consideremos también el vector $(-1)\,a$. *El vector* $(-1)\,a$ *se llama vector opuesto al vector* a *y se denota con* $-a$:

$$-a=(-1)\,a.$$

Como al multiplicar el vector a por -1 resulta un vector del mismo módulo, colineal al vector a, pero dirigido en dirección contraria (fig. 92), los vectores a y $-a$ se llaman *opuestos entre sí*.

Si se aplica el vector $-a$ al extremo del vector a, el extremo del vector $-a$ coincidirá con el origen del vector a; por consiguiente, $a+(-a)$ es el vector nulo:

$$a+(-a)=0. \tag{1}$$

151. Consideremos nuevamente dos vectores arbitrarios a y b. De la identidad (1) se deduce inmediatamente que

$$b-a=b+(-a). \tag{2}$$

En efecto,

$$a+[b+(-a)]=b+[a+(-a)]=b+0=b;$$

o sea que, al sumar el vector $b+(-a)$ al vector a, resulta el vector b, lo que quiere decir que el vector $b+(-a)$ es igual a la diferencia $b-a$.

La igualdad (2) proporciona una nueva regla de sustracción: *para obtener la diferencia $b-a$ es necesario sumar al vector b el*

vector opuesto al vector a (fig. 93; en esta figura se observa también que la suma de los vectores a y $b+(-a)$ es igual al vector b). Esta última regla resulta conveniente, sobre todo, para construir el resultado de la suma y de la resta de unos cuantos vectores; por ejemplo, para hallar $x=a-b-c+d-e$, es suficiente tomar los vectores a, $-b$, $-c$, d, $-e$ y construir su suma como ya se indicó en el n° 147.

§ 51. Teoremas fundamentales sobre proyecciones

152. Estableceremos a continuación dos teoremas importantes sobre proyecciones de vectores.

Teorema 17. *La proyección de una suma de vectores es igual a la suma de sus proyecciones* (sobre un mismo eje):

$$\text{pr}_u(a_1+a_2+\ldots+a_n)=\text{pr}_u a_1+\text{pr}_u a_2+\ldots+\text{pr}_u a_n.$$

Demostración. Formemos una línea quebrada con los lados vectoriales a_1, a_2, ..., a_n (véase n° 147), es decir, apli-

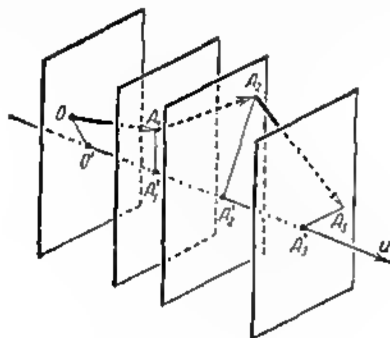


Fig. 94.

quémos el vector a_2 al extremo del vector a_1, apliquemos después el vector a_3 al extremo del vector a_2, etc., etc., y, por fin, apliquemos el vector a_n al extremo del vector a_{n-1}. Designemos (estando situados los vectores de la manera indicada) el origen del vector a_1 con la letra O, su extremo, con la letra A_1, el extremo del vector a_2, con la letra A_2, etc., etc. Entonces,

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\overline{OA_n}. \qquad (1)$$

Proyectemos todos los puntos O, A_1, A_2, ..., A_n sobre el eje u, y designemos sus proyecciones mediante O', A_1', A_2', ..., A_n' (véase la fig. 94, correspondiente al caso $n=3$), respectivamente;

se tiene,

$$O'A_1' = \text{pr}_u\, \boldsymbol{a}_1, \quad A_1'A_2' = \text{pr}_u \boldsymbol{a}_2, \quad \ldots, \quad A_{n-1}'A_n' = \text{pr}_u \boldsymbol{a}_n. \qquad (2)$$

Por otra parte, por la igualdad (1),

$$\text{pr}_u (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n) = \text{pr}_u \overline{OA_n} = O'A_n'. \qquad (3)$$

Pero, según el nº 3, para cualquier posición de los puntos O', A_1', A_2', ..., A_n' sobre el eje u se verifica la identidad:

$$O'A_n' = O'A_1' + A_1'A_2' + A_2'A_3' + \ldots + A_{n-1}'A_n'. \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (2) y (3), de la identidad (4) se tiene,

$$\text{pr}_u (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n) = \text{pr}_u \boldsymbol{a}_1 + \text{pr}_u \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \text{pr}_u \boldsymbol{a}_n.$$

Con lo que el teorema queda demostrado.

Teorema 18. *Al multiplicar un vector por un número, su proyección se multiplica por el mismo número:*

$$\text{pr}_u\, \alpha \boldsymbol{a} = \alpha\, \text{pr}_u\, \boldsymbol{a}.$$

Demostración. Supongamos que el vector $\boldsymbol{a}$ está aplicado en un punto O del eje u; designemos su extremo con la letra A.

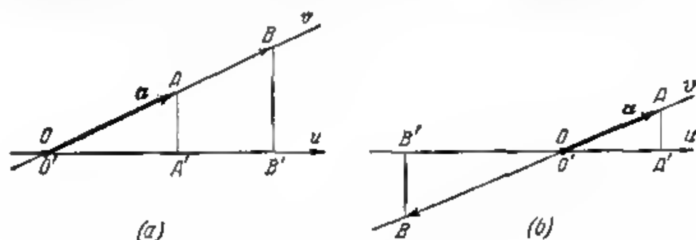


Fig. 95.

Vamos a suponer que el vector $\alpha\boldsymbol{a}$ también está aplicado al punto O; su extremo lo designaremos con la letra B. Así pues, $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{OB} = \alpha\boldsymbol{a}$.

Consideremos la recta v, en la que están situados los puntos O, A, B. Establezcamos en esta recta la dirección positiva (cualquiera); de este modo, ésta se convierte en eje.

Proyectemos los puntos O, A y B sobre el eje u; sean O', A', B', sus proyecciones respectivas (fig. 95, a y b). Por el conocido teorema de la geometría elemental, obtenemos la proporción:

$$\frac{|O'B'|}{|O'A'|} = \frac{|OB|}{|OA|}. \qquad (5)$$

Si los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{OA}$ (situados en el eje v) tienen una misma dirección, los segmentos $\overline{O'B'}$ y $\overline{O'A'}$ (del eje u) también tienen una misma dirección; si los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{OA}$ tienen dirección contraria, los segmentos $\overline{O'B'}$ y $\overline{O'A'}$ también tienen dirección contraria (así es, cuando α es negativo; este caso corresponde a la figura 95, *b*). Por lo tanto, las razones de las m a g n i t u d e s de estos segmentos $\frac{O'B'}{O'A'}$ y $\frac{OB}{OA}$ s o n d e i g u a l s i g n o; esto muestra que la igualdad (5) se puede escribir así:

$$\frac{O'B'}{O'A'}=\frac{OB}{OA}.$$

Como $\overline{OB}=\alpha\boldsymbol{a}$ y $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$, se tiene, $\frac{OB}{OA}=\alpha$. Por consiguiente, $\frac{O'B'}{O'A'}=\alpha$, o sea, $O'B'=\alpha\cdot O'A'$. De aquí que

$$\text{pr}_u\,\alpha\boldsymbol{a}=\alpha\,\text{pr}_u\boldsymbol{a}.$$

Con lo que el teorema queda demostrado.

N o t a. El último teorema se puede enunciar con mayor claridad así: *al alargar un vector en α veces, su proyección se alarga también α veces.*

153. En el n° 134 fue establecido el principio de definición de cada vector libre en el espacio mediante tres números, que son sus coordenadas. Es importante saber *qué operaciones aritméticas, efectuadas con las coordenadas de vectores, corresponden a las operaciones lineales que se efectúan con los mismos vectores.* La respuesta a esta pregunta se da inmediatamente con los teoremas 17 y 18 n° 152, si se tiene en cuenta que las coordenadas (cartesianas) de un vector son sus proyecciones sobre los ejes coordenados. Con más precisión, según el teorema 17, *al sumar los vectores, sus coordenadas se suman.* Por lo tanto, si

$$\boldsymbol{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},$$

se tiene,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{X_1+X_2;\ Y_1+Y_2;\ Z_1+Z_2\}.$$

De aquí se deduce que

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{X_1-X_2;\ Y_1-Y_2;\ Z_1-Z_2\}.$$

Este resultado se puede expresar simbólicamente con una sola relación:

$$\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}\pm\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}=\{X_1\pm X_2;\ Y_1\pm Y_2;\ Z_1\pm Z_2\}. \qquad (6)$$

Además, según el teorema 18, *al multiplicar un vector por un número, sus coordenadas se multiplican por el mismo número.* Así pues, si $\boldsymbol{a}=\{X;\ Y;\ Z\}$, para cualquier número α, se tiene,

$$\alpha\boldsymbol{a}=\{\alpha X;\ \alpha Y;\ \alpha Z\}.$$

Este resultado se puede expresar simbólicamente así

$$\alpha\{X;\ Y;\ Z\} = \{\alpha X;\ \alpha Y;\ \alpha Z\}. \tag{7}$$

154. De lo anterior fácilmente se deduce *la condición de colinealidad de dos vectores* dados por sus coordenadas.

A saber, los vectores $\boldsymbol{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ y $\boldsymbol{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ son colineales cuando, y sólo cuando, uno de ellos se puede obtener multiplicando al otro por un número: $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$ (se supone que $\boldsymbol{a} \neq 0$). La igualdad vectorial

$$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$$

es equivalente a tres igualdades numéricas:

$$X_2 = \lambda X_1, \quad Y_2 = \lambda Y_1, \quad Z_2 = \lambda Z_1,$$

y estas últimas igualdades significan que las coordenadas del vector $\boldsymbol{b}$ son proporcionales a las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$. Por consiguiente, *los vectores* $\boldsymbol{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ *y* $\boldsymbol{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ *son colineales cuando, y sólo cuando,*

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1},$$

es decir, cuando sus coordenadas son proporcionales.

§ 52. Descomposición de vectores en sus componentes

155. Si en el espacio se ha dado un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares, simultáneamente vamos a considerar una terna determinada de vectores; éstos los representaremos con las notaciones $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Estos vectores se determinan del siguiente modo:

1) el vector $\boldsymbol{i}$ está situado en el eje Ox, el vector $\boldsymbol{j}$ está situado en el eje Oy, el vector $\boldsymbol{k}$ está situado en el eje Oz;

2) cada uno de los vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección positiva de su eje;

3) los vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ son unitarios, es decir, $|\boldsymbol{i}| = 1$, $|\boldsymbol{j}| = 1$, $|\boldsymbol{k}| = 1$.

Resulta *que cualquier vector del espacio se puede expresar mediante los vectores* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ *utilizando las operaciones lineales.* Veamos a continuación cómo se obtiene esta expresión.

Consideremos un vector arbitrario $\boldsymbol{a}$. Supongamos (para facilitar el estudio) que está aplicado al origen de coordenadas. Designemos el extremo del vector $\boldsymbol{a}$ con la letra A. Tracemos por el punto A una recta paralela al eje Oz. Esta tiene que cortar al plano Oxy; designemos su punto de intersección con la letra B. Tracemos, después, por el punto B una recta paralela al eje Oy, y una recta paralela al eje Ox. La primera de éstas tiene que cortar al eje Ox, la segunda, al eje Oy.

Designemos estos puntos de intersección con A_x y A_y, respectivamente. Tracemos, finalmente, por el punto A una recta paralela a la recta OB; esta recta paralela tiene que cortar al eje Oz en un punto, que lo designaremos con A_z (fig. 96).

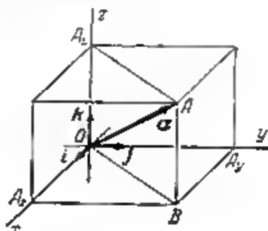


Fig. 96.

Por la regla de la suma de vectores (aplicada al paralelogramo $OBAA_z$), se tiene:

$$\boldsymbol{a}=\overline{OB}+\overline{OA_z}. \qquad (1)$$

Asimismo, por la regla de la suma de vectores (aplicada al paralelogramo OA_yBA_x)

$$\overline{OB}=\overline{OA_x}+\overline{OA_y}. \qquad (2)$$

Como consecuencia de las igualdades (1) y (2),

$$\boldsymbol{a}=\overline{OA_x}+\overline{OA_y}+\overline{OA_z}. \qquad (3)$$

Como los vectores $\overline{OA_x}$ e $\boldsymbol{i}$ están situados en una recta, el vector $\overline{OA_x}$ se puede obtener mediante un «alargamiento» del vector $\boldsymbol{i}$; así pues, se puede escribir: $\overline{OA_x}=\lambda\boldsymbol{i}$, en donde λ es cierto número.

De modo análogo, $\overline{OA_y}=\mu\boldsymbol{j}$ y $\overline{OA_z}=\nu\boldsymbol{k}$ (la fig. 96 corresponde al caso en que λ, μ y ν son positivos).

De la igualdad (3) y de las relaciones $\overline{OA_x}=\lambda\boldsymbol{i}$, $\overline{OA_y}=\mu\boldsymbol{j}$, $\overline{OA_z}=\nu\boldsymbol{k}$, resulta

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{i}+\mu\boldsymbol{j}+\nu\boldsymbol{k}. \qquad (4)$$

O sea, queda demostrado, que cualquier vector $\boldsymbol{a}$ del espacio se puede expresar mediante los vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, empleando las operaciones lineales.

Teniendo presente que todos los vectores del espacio se pueden expresar mediante los vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ del modo indicado, a esta terna de vectores se le llamará *base coordenada.*

La representación del vector $\boldsymbol{a}$ *en la forma* $\lambda\boldsymbol{i}+\mu\boldsymbol{j}+\nu\boldsymbol{k}$ *se llama descomposición del vector* $\boldsymbol{a}$ *en la base* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Los números λ, μ,

ν se llaman *coeficientes* de esta descomposición; los vectores $\lambda \boldsymbol{i}$, $\mu \boldsymbol{j}$, $\nu \boldsymbol{k}$ se llaman *componentes* del vector $\boldsymbol{a}$ respecto de la base $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Los vectores $\lambda \boldsymbol{i}$, $\mu \boldsymbol{j}$, $\nu \boldsymbol{k}$ se llaman componentes del vector $\boldsymbol{a}$ *porque su suma forma el vector* $\boldsymbol{a}$.

156. Ahora vamos a procurar aclarar el significado geométrico de los coeficientes λ, μ, ν. Como $\overrightarrow{OA_x}=\lambda \boldsymbol{i}$, e $\boldsymbol{i}$ es un vector unitario, el número λ es la razón de la longitud del segmento $\overline{OA_x}$ a la unidad de medida, tomada con signo más o menos, según que el segmento tenga la misma dirección que el vector $\boldsymbol{i}$ o tenga la dirección opuesta. Mejor dicho, λ es la magnitud del segmento $\overline{OA_x}$ del eje Ox, en el sentido definido en el nº 2, es decir, $\lambda = OA_x$. Pero OA_x es, precisamente, la proyección del vector $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$ sobre el eje Ox. Por consiguiente,

$$\lambda = \text{pr}_x \boldsymbol{a} = X.$$

Análogamente,

$$\mu = \text{pr}_y \boldsymbol{a} = Y, \quad \nu = \text{pr}_z \boldsymbol{a} = Z.$$

157. Todo lo expuesto en los nºnº 155, 156 se puede resumir con el teorema siguiente:

Teorema 19. *Cualquiera que sea el vector* $\boldsymbol{a}$, *éste siempre se puede descomponer en la base* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, *es decir, se puede representar en la forma*

$$\boldsymbol{a} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k};$$

los coeficientes de esta descomposición se determinan unívocamente por el vector $\boldsymbol{a}$; *precisando,* X, Y, Z *son las proyecciones del vector* $\boldsymbol{a}$ *sobre los ejes coordenados* (es decir, las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$).

158. Hagamos notar que la descomposición de los vectores se puede efectuar no sólo en la base $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Sean dados tres vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$. Supongamos, para mayor claridad, que están aplicados a un punto común O. No vamos a hacer ninguna suposición especial respecto a estos vectores (pueden tener cualquier longitud y pueden formar entre sí ángulos cualesquiera). Se supone solamente, que se cumple una condición: al ser aplicados al punto común O, los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ no tienen que estar situados en un plano. En estas condiciones se verifica el teorema siguiente:

Cualquiera que sea el vector $\boldsymbol{a}$, *éste siempre se puede expresar en forma de una combinación lineal de los vectores* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$:

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a}_1 + \mu \boldsymbol{a}_2 + \nu \boldsymbol{a}_3. \tag{5}$$

Esta expresión se llama *descomposición del vector* $\boldsymbol{a}$ *en la base* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$.

Para demostrar el teorema enunciado, tracemos por el punto O tres ejes Ox, Oy, Oz en las respectivas direcciones de los vectores

a_1, a_2, a_3. Después de esto, la igualdad (5) se puede establecer repitiendo todos los cálculos y razonamientos con los que se demostró la igualdad (4). Sólo que hay que sustituir los vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ por los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ (el paralelepipedo representado en la figura 96 tiene que ser oblicuo).

Queda por aclarar el significado geométrico de los coeficientes λ, μ, ν en la igualdad (5). Se tiene: $\overline{OA_x} = \lambda \boldsymbol{a}_1$; de esto se deduce que λ es la magnitud del segmento $\overline{OA_x}$ del eje Ox, si el vector $\boldsymbol{a}_1$ se

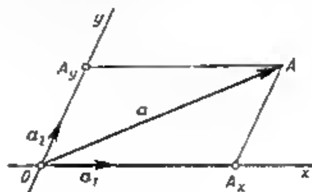


Fig. 96a.

ha tomado como unidad de medida en este eje. Un significado análogo tienen los números μ y ν. A veces, los segmentos OA_x, OA_y, OA_z se llaman proyecciones oblicuas del vector $\boldsymbol{a}$ sobre los ejes Ox, Oy, Oz. De acuerdo a esto, se puede decir que los coeficientes λ, μ, ν, en la igualdad (5), son las magnitudes de las proyecciones oblicuas del vector $\boldsymbol{a}$ sobre los ejes Ox, Oy, Oz, si cada proyección se ha medido en su eje con su unidad de medida. De aquí que los *coeficientes de la descomposición del vector dado en la base considerada, se determinan unívocamente* (puesto que éstos expresan unas magnitudes geométricas determinadas).

159. Si el vector $\boldsymbol{a}$ está situado en el plano de los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, su descomposición en la base $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ es de la forma:

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a}_1 + \mu \boldsymbol{a}_2,$$

es decir, $\nu = 0$. En efecto, en este caso, el punto A coincide con el punto B y, por consiguiente, $\overline{OA_z} = 0$.

Si se quieren considerar solamente los vectores situados en un plano determinado, necesitando descomponer éstos solamente en una base, entonces, es suficiente tomar una base de dos vectores, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, situados en el plano dado (el tercer vector está de sobra). Se puede tomar por base cualquier par de vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ del plano dado, pero con la condición de que, si los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ están aplicados a un punto común O, éstos no tienen que estar situados en una recta. Mejor dicho, la base del plano se compone de vectores no colineales. Es natural que la construcción de los componentes en el

plano es más sencilla que en el espacio; ésta está representada en la figura 96 *a*. Se tiene:

$$\boldsymbol{a}=\overline{OA}=\overline{OA_x}+\overline{OA_y}=\lambda \boldsymbol{a}_1+\mu \boldsymbol{a}_2.$$

Los segmentos OA_x, OA_y son las proyecciones oblicuas del vector $\boldsymbol{a}$ sobre los ejes Ox, Oy; los coeficientes λ y μ son sus magnitudes, suponiendo que por segmentos unitarios en los ejes se han tomado los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$.

9.

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

§ 53. El producto escalar y sus propiedades fundamentales

160. *Se llama producto escalar de dos vectores, al producto de los módulos de estos vectores por el coseno del ángulo que forman entre sí.*

El producto escalar de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ se representa con la notación $\boldsymbol{ab}$.

Designemos con la letra φ el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$; entonces, el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ se puede expresar por la fórmula:

$$\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi. \qquad (1)$$

Para lo que sigue, es importante señalar que $|\boldsymbol{b}|\cos\varphi=\text{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ (véase n° 132) y, por consiguiente,

$$\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}|\,\text{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}. \qquad (2)$$

Análogamente, $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=\text{pr}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$, y también se obtiene,

$$\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{b}|\,\text{pr}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}. \qquad (3)$$

Por lo tanto, *el producto escalar de los vectores* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *se puede considerar, bien como el producto de dos números, uno de los cuales es el módulo del vector* $\boldsymbol{a}$ *y el otro, la proyección del vector* $\boldsymbol{b}$ *sobre el eje del vector* $\boldsymbol{a}$, *bien como el producto de dos números, uno de los cuales es el módulo del vector* $\boldsymbol{b}$ *y el otro, la proyección del vector* $\boldsymbol{a}$ *sobre el eje del vector* $\boldsymbol{b}$.

161. El concepto de producto escalar tiene por origen la mecánica. Precisamente, si el vector (libre) $\boldsymbol{a}$ representa una fuerza cuyo punto de aplicación se desplaza del origen al extremo del vector $\boldsymbol{b}$, el trabajo w de esta fuerza se determina por la igualdad

$$w=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi.$$

En el cálculo vectorial, esta cantidad se llama producto de dos vectores, precisamente, porque ésta goza de algunas de las propiedades algebraicas del producto ordinario de los números (éstas se indicarán en el párrafo siguiente). Se llama producto escalar, porque el resultado es un (número) escalar.

162. El producto escalar tiene las propiedadas algebraicas siguientes:

1. Propiedad conmutativa:

$$ab = ba.$$

Demostración. Según la definición, $ab = |a||b|\cos\varphi$ y $ba = |b|\,|a|\cos\varphi$; pero $|a|\,|b| = |b|\,|a|$, puesto que es una multiplicación ordinaria de números, por lo tanto, $ab = ba$.

2. Propiedad asociativa con respecto a la multiplicación por un número:

$$(\alpha a)\,b = \alpha\,(ab).$$

Demostración. Por la fórmula (3), se tiene:

$$(\alpha a)\,b = |b|\,\mathrm{pr}_b\,(\alpha a).$$

Pero, según el teorema 18 (nº 152), $\mathrm{pr}_b\,(\alpha a) = \alpha\,\mathrm{pr}_b\,a$. Por lo tanto,

$$(\alpha a)\,b = |b|\,\mathrm{pr}_b\,(\alpha a) = |b|\,\alpha\,\mathrm{pr}_b a = \alpha\,(|b|\,\mathrm{pr}_b a).$$

Por otra parte, por la misma fórmula (3), $|b|\,\mathrm{pr}_b\,a = ab$. Por consiguiente,

$$(\alpha a)\,b = \alpha\,(|b|\,\mathrm{pr}_b a) = \alpha\,(ab).$$

Nota 1. De las propiedades 1 y 2 se deduce que

$$(\alpha a)\,(\beta b) = (\alpha\beta)\,(ab).$$

En efecto,

$$(\alpha a)\,(\beta b) = \alpha\,(a\,(\beta b)) = \alpha\,((\beta b)\,a) = \alpha\,(\beta\,(ba)) = (\alpha\beta)\,(ba) = (\alpha\beta)\,(ab).$$

3. Propiedad distributiva con respecto a la suma:

$$a\,(b + c) = ab + ac.$$

Demostración. Por la fórmula (2), se tiene,

$$a\,(b + c) = |a|\,\mathrm{pr}_a\,(b + c).$$

Pero, según el teorema 17 (nº 152), $\mathrm{pr}_a\,(b + c) = \mathrm{pr}_a\,b + \mathrm{pr}_a c$. Por lo tanto,

$$a\,(b + c) = |a|\,\mathrm{pr}_a\,(b + c) = |a|\,(\mathrm{pr}_a b + \mathrm{pr}_a c) = |a|\,\mathrm{pr}_a b + |a|\,\mathrm{pr}_a c.$$

Por otra parte, por la misma fórmula (2), $|a|\,\mathrm{pr}_a b = ab$ y $|a|\,\mathrm{pr}_a c = ac$. Por consiguiente,

$$a\,(b + c) = |a|\,\mathrm{pr}_a b + |a|\,\mathrm{pr}_a c = ab + ac.$$

La última propiedad demostrada nos da la posibilidad de efectuar miembro a miembro el producto escalar de los polinomios vectoriales. En virtud de la primera propiedad, podemos despreocuparnos del orden de los factores. La segunda propiedad permite entonces (véase la nota 1 anterior) agrupar los coeficientes numéricos de los factores vectoriales. Por ejemplo,

$$(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c}+4\boldsymbol{d})=(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c})+(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})(4\boldsymbol{d})=$$
$$=(2\boldsymbol{a})(3\boldsymbol{c})+(5\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c})+(2\boldsymbol{a})(4\boldsymbol{d})+(5\boldsymbol{b})(4\boldsymbol{d})=$$
$$=6\boldsymbol{ac}+15\boldsymbol{bc}+8\boldsymbol{ad}+20\boldsymbol{bd}.$$

Nota 2. En un sentido, el producto escalar de vectores no es esencialmente semejante al producto ordinario de los números: como el producto escalar de dos vectores ya no es un vector, sino un número, es absurdo hablar del producto escalar de tres o más factores vectoriales. Obsérvese, que el símbolo $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$ se puede entender solamente así: $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$ es el producto del número $\boldsymbol{ab}$ por el vector $\boldsymbol{c}$, o sea, $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$ es el vector $\boldsymbol{c}$, «alargado» en $\boldsymbol{ab}$ «veces».

163. A continuación se exponen algunas propiedades geométricas importantes del producto escalar.

1. *Si los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, son diferentes de cero y forman entre sí un ángulo agudo, el producto escalar $\boldsymbol{ab}$ es positivo.*

En efecto, si el ángulo φ es agudo, $\cos\varphi > 0$; por consiguiente,

$$\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi > 0.$$

2. *Si los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ son diferentes de cero y forman entre sí un ángulo obtuso, el producto escalar $\boldsymbol{ab}$ es negativo.*

En efecto, si el ángulo φ es obtuso, $\cos\varphi < 0$; por consiguiente,

$$\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi < 0.$$

3. *Si los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares entre sí, entonces, $\boldsymbol{ab}=0$.*

En efecto, si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares entre sí, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ y $\cos\varphi=0$; por consiguiente, $\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi=0$.

4. *Si el producto escalar de dos vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ es igual a cero, los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares entre sí.*

En efecto, si al menos uno de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ es igual a cero, se puede suponer que éste es perpendicular al otro, ya que siempre se puede considerar que el vector nulo tiene dirección arbitraria; si ninguno de estos vectores es igual a cero, en virtud de la igualdad $\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi=0$, tiene que ser $\cos\varphi=0$, es decir, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, lo que significa que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares entre sí.

Las dos propiedades últimas se pueden enunciar conjuntamente del modo siguiente: *el producto escalar de dos vectores es igual a cero cuando, y sólo cuando, estos vectores son perpendiculares entre sí.*

Señalemos, por fin, otra propiedad más del producto escalar,

5. *El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de su módulo:*

$$aa = |a|^2.$$

En efecto, $aa = |a||a|\cos 0$; pero $\cos 0 = 1$, por consiguiente, $aa = |a|^2$.

Nota. El producto escalar aa se llama cuadrado escalar del vector a y se representa con la notación a^2. En virtud de lo expuesto anteriormente, se tiene: $a^2 = |a|^2$, o sea, *el cuadrado escalar de un vector es igual al cuadrado de su módulo.*

§ 54. Expresión del producto escalar mediante las coordenadas de los vectores que se multiplican

164. El teorema que se da a continuación da la posibilidad de calcular el producto escalar de dos vectores, conociendo sus coordenadas, es decir, conociendo sus proyecciones sobre los ejes de un sistema cartesiano rectangular de coordenadas:

Teorema 20. *Si los vectores* a y b *se han dado mediante sus coordenadas:*

$$a = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad b = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},$$

su producto escalar queda determinado por la fórmula

$$ab = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Demostración. Escribamos previamente la «tabla de multiplicar» de los vectores básicos i, j, k:

$$\left.\begin{array}{lll} i^2 = 1, & ij = 0, & ik = 0, \\ ji = 0, & j^2 = 1, & jk = 0, \\ ki = 0, & kj = 0, & k^2 = 1. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Aquí, los productos escalares de dos vectores básicos diferentes son iguales a cero, puesto que éstos son perpendiculares entre sí (véase la propiedad 3, n° 163); $i^2 = 1$, $j^2 = 1$, $k^2 = 1$, puesto que los vectores i, j, k son unitarios (véase la propiedad 5 n° 163).

Hallemos ahora la descomposición de los vectores a y b en la base i, j, k:

$$\left.\begin{array}{l} a = X_1 i + Y_1 j + Z_1 k, \\ b = X_2 i + Y_2 j + Z_2 k \end{array}\right\} \qquad (2)$$

(véase el teorema 19 n° 157). En virtud de las propiedades algebraicas del producto escalar establecidas en el n° 162, se puede calcular

ab multiplicando miembro a miembro las igualdades (2):

$$ab = X_1X_2i^2 + X_1Y_2ij + X_1Z_2ik + \\ + Y_1X_2ji + Y_1Y_2j^2 + Y_1Z_2jk + \\ + Z_1X_2ki + Z_1Y_2kj + Z_1Z_2k^2.$$

Aplicando la tabla (1) de multiplicación de los vectores básicos, obtenemos:

$$ab = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2,$$

que es lo que se quería demostrar.

El enunciado del teorema demostrado, se puede expresar también así: *el producto escalar de dos vectores es igual a la suma de los productos de las coordenadas correspondientes de estos vectores.*

165. Señalemos ahora algunas consecuencias importantes del teorema 20.

Corolario 1. *Es condición necesaria y suficiente para la perpendicularidad de los vectores*

$$a = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\} \quad \text{y} \quad b = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},$$

que se verifique la igualdad

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \qquad (3)$$

En efecto, según el nº 163, los vectores a y b son perpendiculares entre sí cuando, y sólo cuando, $ab = 0$. Pero, por el teorema 20, se tiene: $ab = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$. Por consiguiente, los vectores a y b son perpendiculares entre sí cuando, y sólo cuando, se cumple la igualdad (3).

Corolario 2. *El ángulo φ formado por los vectores*

$$a = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\} \quad \text{y} \quad b = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$$

se determina por la igualdad

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \qquad (4)$$

En efecto, por la definición del producto escalar, $ab = |a||b|\cos\varphi$; de aquí que

$$\cos\varphi = \frac{ab}{|a|\cdot|b|}. \qquad (5)$$

Pero, por el teorema 20, se tiene: $ab = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$, y por el teorema 16 (nº 139), $|a| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$, $|b| = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}$. De esto y de la fórmula (5) resulta la fórmula (4).

Corolario 3. *Si un eje u forma con los ejes coordenados los ángulos α, β, γ, la proyección de un vector arbitrario $s = \{X;\ Y;\ Z\}$*

sobre este eje se determina por la igualdad

$$\mathrm{pr}_u s = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma. \qquad (6)$$

Para su demostración, supongamos que la dirección del eje u se determina por el vector unitario $\boldsymbol{e}$. De acuerdo a la fórmula (2) n° 160, se tiene: $\boldsymbol{es} = |\boldsymbol{e}|\,\mathrm{pr}_e \boldsymbol{s}$. Obsérvese que $|\boldsymbol{e}| = 1$ y $\mathrm{pr}_e \boldsymbol{s} = \mathrm{pr}_u \boldsymbol{s}$. Así pues, $\mathrm{pr}_u \boldsymbol{s} = \boldsymbol{es}$. Como el vector $\boldsymbol{e}$ tiene la dirección del eje dado u, éste forma con los ejes coordenados los mismos ángulos que este eje, o sea, α, β, γ. De aquí que (véase el teorema 16 n° 139)

$$\mathrm{pr}_x \boldsymbol{e} = |\boldsymbol{e}|\cos\alpha, \quad \mathrm{pr}_y \boldsymbol{e} = |\boldsymbol{e}|\cos\beta, \quad \mathrm{pr}_z \boldsymbol{e} = |\boldsymbol{e}|\cos\gamma;$$

pero $|\boldsymbol{e}| = 1$, por consiguiente,

$$\boldsymbol{e} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}.$$

Conociendo $\boldsymbol{s} = \{X;\ Y;\ Z\}$ y $\boldsymbol{e} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$, por el teorema 20 hallamos: $\mathrm{pr}_u \boldsymbol{s} = \boldsymbol{es} = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma$, que es lo que se quería demostrar.

168. Ejemplo 1. Dados tres puntos $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 2;\ 1)$ y $C(2;\ 1;\ 2)$ hallar el ángulo $\varphi = \angle BAC$.

Solución. Aplicando el teorema 15 (n° 135), obtenemos:

$$\overline{AB} = \{1;\ 1;\ 0\}, \quad \overline{AC} = \{1;\ 0;\ 1\}.$$

De aquí y en virtud del corolario 2 del teorema 20, hallamos:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\,\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\varphi = 60°$.

Ejemplo 2. Dados los puntos $A(1;\ 1;\ 1)$ y $B(4;\ 5;\ -3)$, hallar la proyección del vector $\overline{AB}$ sobre el eje u que forma con los ejes coordenados ángulos agudos iguales.

Solución. Sean $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ los cosenos directores del eje u; por las condiciones del problema, éstos son iguales entre sí y positivos (puesto que α, β, γ son ángulos agudos iguales). Pero, según la igualdad (4) n° 140,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Por esto y por lo dicho anteriormente,

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Por el teorema 15 (n° 135),

$$\overline{AB} = \{3;\ 4;\ -4\}.$$

No queda más que aplicar el corolario 3 del teorema 20, es decir, la fórmula (6); aplicándola se tiene:

$$\mathrm{pr}_u \overline{AB} = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

10.

PRODUCTOS VECTORIAL Y MIXTO DE VECTORES

§ 55. El producto vectorial y sus propiedades fundamentales

167. Vamos a definir una nueva operación con vectores: el producto vectorial. Se supone que se ha elegido en el espacio un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares.

Se llama producto vectorial del vector **a** *por el vector* **b** *al vector representado por la notación* [**ab**] *y determinado por las tres condiciones siguientes.*

1) *el módulo del vector* [**ab**] *es igual a* |**a**| |**b**| sen φ, en donde φ *es el ángulo formado por los vectores* **a** y **b**;

2) *el vector* [**ab**] *es perpendicular a cada uno de los vectores* **a** *y* **b**;

3) *la dirección del vector* [**ab**] *respecto a los vectores* **a** *y* **b** *es igual que la del eje coordenado Oz respecto a los ejes coordenados Ox y Oy*. Mejor dicho, si los tres vectores **a**, **b** y [**ab**] tienen un origen común, el vector [**ab**] tiene que estar dirigido de tal modo, que la rotación más corta del vector **a** al vector **b** se vea desde sus extremos en el mismo sentido que se ve desde algún punto del semieje positivo *Oz* la rotación más corta del semieje positivo *Ox* al semieje positivo *Oy*.

Para precisar, supongamos que en el sistema de coordenadas elegido la rotación más corta del semieje positivo *Ox* al semieje positivo *Oy* se ve, desde los puntos del semieje positivo *Oz*, en *dirección contraria a la de las agujas de un reloj*. Tal sistema de coordenadas se llama de *mano derecha*. El sistema de mano derecha se puede caracterizar también del siguiente modo: si el dedo pulgar de la mano derecha indica la dirección del eje *Ox* y el dedo índice, la dirección del eje *Oy*, el dedo cordial indicará la dirección del eje *Oz* de este sistema *).

*) El sistema de coordenadas se llama de *mano izquierda*, si los ejes *Ox*, *Oy*, *Oz* están orientados igual que los dedos pulgar, índice y cordial de la mano izquierda.

Al producto vectorial $[ab]$ se le asigna la dirección de acuerdo al sistema de coordenadas elegido de mano derecha. A saber, si a, b y $[ab]$ tienen un origen común, el vector $[ab]$ tiene que estar dirigido de tal modo que desde su extremo se vea la rotación más corta del vector a al vector b (o sea, del primer factor al segundo) *en dirección contraria a la de las agujas de un reloj* (fig. 97). Se puede emplear también la «*regla de la mano derecha*»: si a, b y $[ab]$ tienen un origen común, el vector $[ab]$ tiene que tener la dirección

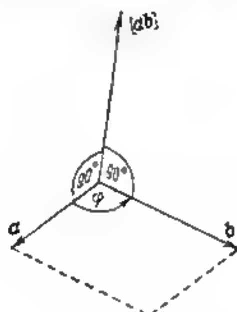


Fig. 97.

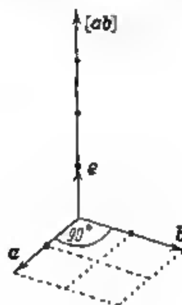


Fig. 98.

del dedo cordial de la mano derecha, si el dedo pulgar indica la dirección del primer factor (o sea, del vector a) y el dedo índice, la dirección del segundo factor (o sea, del vector b). En adelante, frecuentemente nos referiremos a esta regla.

168. El concepto de producto vectorial tiene por origen la mecánica. Precisamente si el vector b representa una fuerza aplicada a un punto M y el vector a va de un punto O al punto M, el vector $[ab]$ representa el momento de la fuerza b respecto al punto O.

En el cálculo vectorial a $[ab]$ se le llama p r o d u c t o de vectores, porque esta cantidad posee ciertas propiedades algebraicas del producto de los números (véase en el n° 171 la segunda y tercera propiedades). Se llama v e c t o r i a l, porque el resultado es un vector.

169. Indiquemos en primer lugar las propiedades g e o m é t r i c a s fundamentales del producto vectorial.

1. *Si los vectores a y b son colineales, su producto vectorial es igual a cero.*

D e m o s t r a c i ó n. Si los vectores a y b son colineales, el ángulo φ formado por ellos es igual a 0° (en el caso de que a y b tengan una misma dirección), o igual a 180° (en caso de que sus direcciones sean opuestas). En uno y otro caso, $\operatorname{sen}\varphi = 0$. Por

consiguiente, $|[ab]|=|a|\,|b|$ sen $\varphi=0$, es decir, el módulo del vector $[ab]$ es igual a cero y, por lo tanto, el mismo vector $[ab]$ es igual a cero.

2. *Si el producto vectorial de los vectores* a *y* b *es igual a cero, los vectores* a y b *son colineales.*

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que $[ab]=0$; entonces $|[ab]|=0$ y, por lo tanto, $|a|\,|b|$ sen $\varphi=0$. Si ninguno de los vectores a y b es igual a cero, de la igualdad anterior se tiene que sen $\varphi=0$ y, por consiguiente, los vectores a y b son colineales. Si, al menos, uno de los vectores a y b es igual a cero, con toda razón se puede suponer que éste es colineal al otro, ya que el vector nulo tiene cualquier dirección.

Estas dos propiedades del producto vectorial se pueden enunciar conjuntamente así: *el producto vectorial de dos vectores es igual a cero cuando, y sólo cuando, estos vectores son colineales.*

3. *Si los vectores* a *y* b *tienen un origen común, el módulo del producto vectorial* $[ab]$ *es igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores* a *y* b.

D e m o s t r a c i ó n. Designemos con la letra S el área del paralelogramo construido sobre los vectores a y b. Como se sabe por la geometría elemental, el área del paralelogramo es igual al producto de sus lados adyacentes por el seno del ángulo formado por ellos. Por lo tanto, $|a|\,|b|$ sen $\varphi=S$ y, por consiguiente,

$$|[ab]|=S, \tag{1}$$

que es lo que se afirmaba.

170. En virtud de la última propiedad, el producto vectorial se puede expresar por la fórmula:

$$[ab]=Se, \tag{2}$$

en donde e es un vector definido por las tres condiciones siguientes:

1) el módulo del vector e es igual a la unidad;

2) el vector e es perpendicular a cada uno de los vectores a y b;

3) el vector e está dirigido en sentido del dedo cordial de la mano derecha, si el dedo pulgar tiene la dirección del vector a y el dedo índice la dirección del vector b (se supone que los vectores a, b y e tienen un origen común).

Para demostrar la fórmula (2) comparemos las condiciones que determinan el vector e con las condiciones que determinan el producto vectorial $[ab]$; de esta comparación se deduce que los vectores $[ab]$ y e son colineales y, además, tienen un mismo sentido. Por lo tanto, el vector $[ab]$ se puede obtener multiplicando el vector e por un número positivo; este número es igual a la razón del módulo del vector $[ab]$ al módulo del vector e, y como $|e|=1$, será igual al módulo del vector $[ab]$, es decir, al número S. De este modo, $[ab]=Se$, que es lo que se quería demostrar (la figura 98 da una

ilustración de la fórmula (2) para el caso en que $|a|=2$, $|b|=2$, $\varphi=90°$).

171. Vamos a establecer a continuación las propiedades algebraicas del producto vectorial.

1. Propiedad anticonmutativa:

$$[ab]=-[ba], \tag{3}$$

es decir, *el producto vectorial de* a *por* b *es el vector opuesto al producto vectorial de* b *por* a.

Demostración. Si los vectores a y b son colineales, tanto $[ab]$ como $[ba]$ se anulan, por consiguiente, se verifica la igualdad (3). Supongamos ahora que los vectores a y b no son colineales.

Obsérvese, ante todo, que en virtud de las dos primeras condiciones que determinan el producto vectorial, los vectores $[ab]$ y $[ba]$ tienen módulos iguales y son colineales; por lo tanto, $[ab]=[ba]$ o $[ab]=-[ba]$. Lo único que queda por resolver es el averiguar cuál de estas dos posibilidades se verifica. La resolución la da la tercera condición. Si, en primer lugar, colocamos los dedos pulgar e índice de la mano derecha en dirección de los vectores a y b, respectivamente, y luego, en dirección de los vectores b y a, tendremos que hacer girar la mano de tal modo, que la dirección del dedo cordial, en el segundo caso, sea opuesta a la dirección que tenía en el primer caso. Por consiguiente, $[ab]$ y $[ba]$ tienen direcciones opuestas, es decir, $[ab]=-[ba]$.

2. Propiedad asociativa respecto al factor escalar:

$$[(\lambda a)b]=\lambda[ab] \tag{4}$$

y

$$[a(\lambda b)]=\lambda[ab]. \tag{5}$$

Demostración. La fórmula (5) se reduce a la fórmula (4) mediante una permutación de factores en los productos vectoriales de los dos miembros de la igualdad (sustituyendo después la letra b por la letra a y la letra a por la letra b). Por lo tanto, es suficiente demostrar la fórmula (4).

Obsérvese, ante todo, que, si $\lambda=0$, o si los vectores a y b son colineales, la fórmula (4) tiene valor, pues en estos casos sus dos miembros son iguales a cero. Supongamos ahora que $\lambda\neq0$ y que los vectores a, b no son colineales.

Según la primera condición, en la definición del producto vectorial el módulo del vector $[ab]$ es igual a $|a|\,|b|\operatorname{sen}\varphi$, en donde φ es el ángulo formado por los vectores a y b; por consiguiente, el módulo del vector $\lambda[ab]$ es igual a $|\lambda|\,|a|\,|b|\operatorname{sen}\varphi$. Por la misma condición, el módulo del vector $[(\lambda a)b]$ es igual a $|\lambda|\,|a|\,|b|\operatorname{sen}\psi$, en donde ψ es el ángulo formado por los vectores λa y b.

Pero el ángulo ψ o es igual al ángulo φ (cuando λ es positivo) o es igual al ángulo $\pi-\varphi$ (cuando λ es negativo); en uno y otro caso, $\operatorname{sen}\varphi=\operatorname{sen}\psi$. De aquí que el módulo del vector $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$ es igual al módulo del vector $\lambda[\boldsymbol{ab}]$.

Según la segunda condición, en la definición del producto vectorial los dos vectores $\lambda[\boldsymbol{ab}]$ y $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$ son perpendiculares a cada uno de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$; por consiguiente, los vectores $\lambda[\boldsymbol{ab}]$ y $[\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$ son colineales.

Como los vectores $\lambda[\boldsymbol{ab}]$ y $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$ tienen igual módulo y son colineales, éstos o bien son iguales, o bien son opuestos entre sí, es decir, o $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{ab}]$ o $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=-\lambda[\boldsymbol{ab}]$. Queda por resolver cuál de éstas dos posibilidades se verifica. Tenemos que examinar dos casos, cuando $\lambda>0$ y cuando $\lambda<0$.

Supongamos que $\lambda>0$; entonces, los vectores $\lambda\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}$ tienen una misma dirección. En este caso, por la regla de la mano derecha, los vectores $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$ y $[\boldsymbol{ab}]$ tienen la misma dirección; pero, si $\lambda>0$, el vector $\lambda[\boldsymbol{ab}]$ tiene la misma dirección que el vector $[\boldsymbol{ab}]$. Por consiguiente, el vector $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$ tiene la misma dirección que el vector $\lambda[\boldsymbol{ab}]$ y, por lo tanto, $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{ab}]$. Supongamos que $\lambda<0$; entonces, los vectores $\lambda\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}$ tienen direcciones opuestas. En este caso, por la regla de la mano derecha, el vector $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$ tiene dirección opuesta al vector $[\boldsymbol{ab}]$; pero, si $\lambda<0$, el vector $\lambda[\boldsymbol{ab}]$ tiene dirección opuesta al vector $[\boldsymbol{ab}]$. Por consiguiente, los vectores $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$ y $\lambda[\boldsymbol{ab}]$ tienen la misma dirección y, por lo tanto, $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{ab}]$. Vemos, pues, que esta relación siempre se verifica.

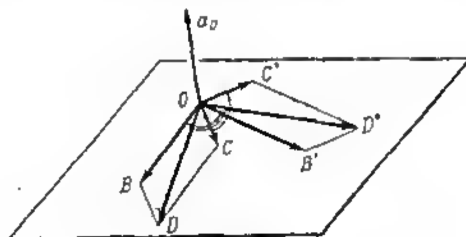


Fig. 99.

3. Propiedad distributiva respecto a la suma:

$$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]=[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{ac}] \tag{6}$$

y

$$[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{ba}]+[\boldsymbol{ca}]. \tag{7}$$

Demostración. La fórmula (7) se reduce a la fórmula (6) mediante una permutación de factores en sus dos miembros. De este modo, es suficiente demostrar la fórmula (6). Obsérvese que si $\boldsymbol{a}=0$, la fórmula (6) es válida. En adelante se supondrá que $\boldsymbol{a}\neq 0$.

Examinemos, primero, el caso particular en que el primer vector es unitario y los otros dos son perpendicutares al mismo.

Trasfademos los tres vectores a un origen común O. Designemos el primer vector (unitario) mediante a_0; sean $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ los otros dos vectores (perpendiculares á a_0), $\overline{OD}$, su suma: $\overline{OD}=\overline{OB}+\overline{OC}$ fig. 99). Hagamos las notaciones:

$$\overline{OB}^*=[a_0\overline{OB}],\ \overline{OC}^*=[a_0\overline{OC}],\ \overline{OD}^*=[a_0\overline{OD}]=[a_0(\overline{OB}+\overline{OC})].$$

Por las dos primeras condiciones de la definición del producto vectorial, se tiene:

1) $|\overline{OB}^*|=|[a_0\overline{OB}]|=|a_0|\,|\overline{OB}|$ sen $90°=|\overline{OB}|$,

2) $\overline{OB}^*\perp a_0$, $\overline{OB}^*\perp\overline{OB}$.

De esto se deduce que el vector $\overline{OB}^*$ se puede obtener girando el vector $\overline{OB}$ alrededor del vector a_0 en un ángulo de 90°. Además, por la tercera condición, esta rotación se verá desde el extremo del vector a_0 en dirección contraria a la de las agujas de un reloj. Análogamente, girando los vectores $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ alrededor del vector a_0 en un ángulo de 90° y en la misma dirección, se obtienen los vectores $\overline{OC}^*$ y $\overline{OD}^*$. Así pues, toda la figura $OB^*D^*C^*$ se obtiene mediante una rotación del paralelogramo $OBDC$; por consiguiente, $OB^*D^*C^*$ es un paralelogramo. De esto se deduce que $\overline{OD}^*=\overline{OB}^*+$ $+\overline{OC}^*$, o sea,

$$[a_0\overline{OD}]=[a_0\overline{OB}]+[a_0\overline{OC}]. \qquad (8)$$

Esta es la igualdad (6) para el caso particular considerado. Sea ahora a un vector cualquiera, perpendicutar a los vectores $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$. Designemos mediante a_0 el vector unitario que tiene la misma dirección que el vector a; se tiene, $a=|a|a_0$. Multipliquemos los dos miembros de la igualdad (8) por el número $|a|$ y sustituyamos $|a|a_0$ por a; obtenemos:

$$[a\overline{OD}]=[a\overline{OB}]+[a\overline{OC}]. \qquad (9)$$

Consideremos, por fin, el caso en que los vectores a, b, c estén situados arbitrariamente. Supongamos que tienen un origen común O. Tracemos por los extremos de los vectores b, c y $b+c$ rectas paralelas al vector a. Tracemos, después, por el punto O, un plano perpendicular a estas rectas; supongamos que éste se corta con los mismos en los puntos B, C y D, respectivamente (fig. 100).

Consideremos los productos vectoriales $[ab]$ y $[a\overline{OB}]$; es fácil de comprender que éstos representan un mismo vector. En efecto, en primer lugar, el módulo del vector $[ab]$ es igual al módulo del vector $[a\overline{OB}]$, puesto que el área del paralelogramo construido sobre

los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es igual al área del rectángulo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\overline{OB}$; en segundo lugar, los vectores $[\boldsymbol{ab}]$ y $[\boldsymbol{a}\overline{OB}]$ son colineales, puesto que los dos son perpendiculares a un mismo plano (precisamente al plano en el que están situados los vectores

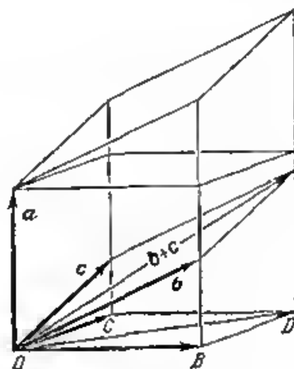


Fig. 100.

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\overline{OB}$); por último, de acuerdo a la regla de la mano derecha, los vectores $[\boldsymbol{ab}]$ y $[\boldsymbol{a}\overline{OB}]$ tienen una misma dirección. Así pues,

$$[\boldsymbol{a}\overline{OB}] = [\boldsymbol{ab}].$$

Análogamente,

$$[\boldsymbol{a}\overline{OC}] = [\boldsymbol{ac}], \quad [\boldsymbol{a}\overline{OD}] = [\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})].$$

Sustituyendo estas expresiones en la igualdad (9) obtenemos:

$$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})] = [\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{ac}],$$

que es lo que se quería demostrar.

172. La última de las propiedades algebraicas demostradas da la posibilidad de efectuar el producto de polinomios vectoriales miembro a miembro. La segunda propiedad permite agrupar los coeficientes numéricos de los factores vectoriales. Por ejemplo,

$$[(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c}+4\boldsymbol{d})] = [(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c})] + [(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})(4\boldsymbol{d})] =$$
$$= [(2\boldsymbol{a})(3\boldsymbol{c})] + [(5\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c})] + [(2\boldsymbol{a})(4\boldsymbol{d})] + [(5\boldsymbol{b})(4\boldsymbol{d})] =$$
$$= 6[\boldsymbol{ac}] + 15[\boldsymbol{bc}] + 8[\boldsymbol{ad}] + 20[\boldsymbol{bd}].$$

Hay que tener siempre presente que, en el producto vectorial, el orden de los factores es esencial. Según la primera propiedad (nº 171), *al permutar los factores en el producto vectorial es necesario poner delante el signo menos.*

Nota. Como se ha establecido en el nº 169, el producto vectorial de vectores colineales es igual a cero. En particular, es igual a cero el producto de factores iguales: $[\boldsymbol{aa}]=0$. Por eso, en el cálculo vectorial no se usa el concepto de cuadrado vectorial.

§ 56. Expresión del producto vectorial mediante las coordenadas de los vectores que se multiplican

173. El teorema siguiente da la posibilidad de calcular el producto escalar de dos vectores conociendo sus coordenadas, o sea, conociendo sus proyecciones sobre los ejes de un sistema cartesiano rectangular de coordenadas.

Teorema 21. *Si los vectores* $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ *se dan mediante sus coordenadas:*

$$\boldsymbol{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad \boldsymbol{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},$$

el producto vectorial del vector $\boldsymbol{a}$ *por el vector* $\boldsymbol{b}$ *se determina por la fórmula*

$$[\boldsymbol{ab}]=\left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}. \quad (1)$$

Demostración. Escribamos, ante todo, la tabla de los productos vectoriales de los vectores básicos. Según la nota hecha al final del nº 172, $[\boldsymbol{ii}]=0$, $[\boldsymbol{jj}]=0$, $[\boldsymbol{kk}]=0$. Consideremos ahora el producto vectorial $[\boldsymbol{ij}]$. El módulo del vector $[\boldsymbol{ij}]$ es igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ (véase nº 169, propiedad 3). Este paralelogramo representa un cuadrado de lado igual a la unidad, por consiguiente, su área es igual a la unidad. Así pues, $[\boldsymbol{ij}]$ es un vector unitario. Teniendo en cuenta que el vector $[\boldsymbol{ij}]$ tiene que ser perpendicular a los vectores $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ y que tiene que estar dirigido de acuerdo a la regla de la mano derecha, es fácil comprender que éste coincide con el tercer vector básico $\boldsymbol{k}$, o sea, $[\boldsymbol{ij}]=\boldsymbol{k}$. Razonando de modo semejante, obtenemos las igualdades: $[\boldsymbol{jk}]=\boldsymbol{i}$, $[\boldsymbol{ki}]=\boldsymbol{j}$. Queda por expresar $[\boldsymbol{ji}]$, $[\boldsymbol{kj}]$, $[\boldsymbol{ik}]$; pero $[\boldsymbol{ji}]=-[\boldsymbol{ij}]$, $[\boldsymbol{kj}]=-[\boldsymbol{jk}]$, $[\boldsymbol{ik}]=-[\boldsymbol{ki}]$; por consiguiente, $[\boldsymbol{ji}]=-\boldsymbol{k}$, $[\boldsymbol{kj}]=-\boldsymbol{i}$, $[\boldsymbol{ik}]=-\boldsymbol{j}$. Así pues, la tabla de multiplicar buscada es:

$$\left.\begin{array}{lll} [\boldsymbol{ii}]=0, & [\boldsymbol{ij}]=\boldsymbol{k}, & [\boldsymbol{ik}]=-\boldsymbol{j}, \\ [\boldsymbol{ji}]=-\boldsymbol{k}, & [\boldsymbol{jj}]=0, & [\boldsymbol{jk}]=\boldsymbol{i}, \\ [\boldsymbol{ki}]=\boldsymbol{j}, & [\boldsymbol{kj}]=-\boldsymbol{i}, & [\boldsymbol{kk}]=0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Descompongamos los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ en la base $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a}=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{b}=X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k} \end{array}\right\} \quad (3)$$

(véase el teorema 19; nº 157). En virtud de las propiedades algebraicas del producto vectorial establecidas en el nº 171, para calcular $[\boldsymbol{ab}]$ se pueden multiplicar miembro a miembro las igualdades (3):

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{ab}] = X_1X_2[\boldsymbol{ii}] + X_1Y_2[\boldsymbol{ij}] + X_1Z_2[\boldsymbol{ik}] + \\ + Y_1X_2[\boldsymbol{ji}] + Y_1Y_2[\boldsymbol{jj}] + Y_1Z_2[\boldsymbol{jk}] + \\ + Z_1X_2[\boldsymbol{ki}] + Z_1Y_2[\boldsymbol{kj}] + Z_1Z_2[\boldsymbol{kk}].\end{aligned}$$

Utilizando la tabla de multiplicar (2) de los vectores básicos, hallamos:

$$[\boldsymbol{ab}] = (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)\,\boldsymbol{i} - (X_1Z_2 - X_2Z_1)\,\boldsymbol{j} + (X_1Y_2 - X_2Y_1)\,\boldsymbol{k},$$

o sea,

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}. \qquad (4)$$

Hemos obtenido la descomposición del vector $[\boldsymbol{ab}]$ en la base $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$; los coeficientes de esta descomposición representan las coordenadas del vector $[\boldsymbol{ab}]$. Así pues,

$$[\boldsymbol{ab}] = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right\}, \qquad (1)$$

que es lo que se quería demostrar.

Nota. Para facilidad en el empleo de la fórmula (1) es conveniente escribir previamente las coordenadas de los vectores dados en forma de una tabla:

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{pmatrix}.$$

Eliminando la primera columna, después, la segunda y, por último, la tercera, obtenemos sucesivamente tres determinantes de segundo orden; calculándolos y tomando el segundo con el signo menos, obtenemos las tres coordenadas del producto vectorial $[\boldsymbol{ab}]$.

Obsérvese también que la fórmula (4) (que es equivalente a la fórmula (1)), se puede escribir del modo siguiente:

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

En efecto, desarrollando este determinante por los elementos de la primera fila, se obtiene la misma expresión que figura en el segundo miembro de la fórmula (4).

174. Ejemplo 1. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = \{2;\ 5;\ 7\}$ y $\boldsymbol{b} = \{1;\ 2;\ 4\}$, hallar las coordenadas del producto vectorial $[\boldsymbol{ab}]$.

Solución. De acuerdo a la nota dada al final del nº anterior, escribimos la tabla

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Eliminando sucesivamente las columnas de esta tabla, se obtienen tres determinantes de segundo orden; calculándolos y tomando el segundo con el signo menos, se obtienen las proyecciones buscadas

$$[ab]=\{6;\ -1;\ -1\}.$$

Ejemplo 2. En el espacio se dan tres puntos: $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 2;\ 2)$ y $C(4;\ 3;\ 5)$. Hallar el área S_Δ del triángulo ABC.

Solución. Consideremos los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. De acuerdo al nº 169 (propiedad 3), el módulo del producto vectorial $[\overline{AB}\ \overline{AC}]$ es igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Pero el área buscada S_Δ del triángulo ABC es igual a la mitad del área de este paralelogramo; por consiguiente,

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|[\overline{AB}\ \overline{AC}]|.$$

Queda por calcular el segundo miembro de esta igualdad.

En primer lugar, aplicando el teorema 15 (nº 135), hallamos las coordenadas de los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}=\{1;\ 1;\ 1\},\qquad \overline{AC}=\{3;\ 2;\ 4\}.$$

De aquí que $[\overline{AB}\ \overline{AC}]=\{2;\ -1;\ -1\}$ y $|[\overline{AB}\ \overline{AC}]|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$. Por lo tanto, $S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

§ 57. El producto mixto de tres vectores

175. Sean dados tres vectores cualesquiera $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$; supongamos que se ha multiplicado vectorialmente $\boldsymbol{a}$ por $\boldsymbol{b}$ y que el vector obtenido $[\boldsymbol{ab}]$ se ha multiplicado escalarmente por el vector $\boldsymbol{c}$; de esta manera, queda determinado el número $[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$, denominado *producto vectorial-escalar* o *producto mixto de los tres vectores* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (emplearemos la última denominación, puesto que es más abreviada). En los párrafos inmediatos se estudian las propiedades fundamentales del producto mixto y se expone una serie de problemas en los que el producto mixto tiene aplicaciones importantes.

176. Diremos que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ son *coplanares*, si están situados en un plano o en planos paralelos. Como los vectores geométricos son vectores libres, en el caso de vectores coplanares siempre se les puede trasladar paralelamente a un plano. En particular, si los vectores coplanares tienen un origen común, estarán situados en un plano.

177. Si, además de darse tres vectores, se ha establecido cuál es el primero, cuál el segundo y cuál el tercero, se dirá que se ha dado una terna ordenada de vectores; por cierto, ulteriormente se omitirá el adjetivo y se dirá simplemente: terna de vectores. En el texto, la terna de vectores se escribirá en el orden de su numeración; por ejemplo, si está escrito: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ se entenderá que $\boldsymbol{a}$ es el primer vector, $\boldsymbol{b}$, el segundo y $\boldsymbol{c}$, el tercero; si

está escrito; ***b, c, a*** se entenderá que ***b*** es el primer vector, ***c***, el segundo y ***a***, el tercero.

178. Una terna de vectores no coplanares se llama *de mano derecha*, si los vectores que la componen, al tener un origen común, se sitúan, en el orden de su numeración, de un modo semejante al de los dedos pulgar, índice y cordial de la mano derecha. Con mayor precisión: una terna de vectores no coplanares se llama de mano derecha, si su tercer vector está situado, con relación al plano de los primeros dos vectores, en el mismo lado en que se sitúa el dedo cordial de la mano derecha, si el dedo pulgar lleva la dirección del primer vector de la terna y el dedo índice, la dirección del segundo vector.

Una terna de vectores no coplanares se llama *de mano izquierda*, si los vectores que la forman, al tener un origen común, se sitúan en el orden de su numeración de un modo semejante al de los dedos pulgar, índice y cordial de la mano izquierda.

Las ternas de vectores coplanares no son ni de mano derecha, ni de mano izquierda.

179. Sean dados unos vectores no coplanares, ***a, b, c***. Numerándolos de todos los modos posibles se obtienen seis ternas: ***a, b, c; b, c, a; c, a, b; b, a, c; a, c, b; c, b, a***. Examinando detenidamente un modelo (que fácilmente se puede construir con alambre) podemos convencernos de que entre las seis ternas indicadas, hay tres de mano derecha y tres de mano izquierda. Las ternas

a, b, c; b, c, a; c, a, b

son de una misma orientación, o sea, o todas son de mano derecha, o todas son de mano izquierda; las ternas

b, a, c; a, c, b; c, b, a

son de otra orientación*).

180. El siguiente teorema fundamental expresa el significado geométrico del producto mixto:

Teorema 22. *El producto mixto* $[\mathbf{ab}]\mathbf{c}$ *es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores* ***a, b, c***, *tomado con signo más, si la terna* ***a, b, c*** *es de mano derecha, y con signo menos, si esta terna es de mano izquierda. Si los vectores* ***a, b, c*** *son coplanares,* $[\mathbf{ab}]\mathbf{c}=0$.

---

*) Se puede indicar también otro método para distinguir las ternas. Figurémonos, que nos encontramos dentro del ángulo sólido de la terna de vectores dada. Entonces, si la rotación del primer vector al segundo, del segundo al tercero y del tercero al primero se ve en dirección contraria a la de las agujas de un reloj, la terna dada es de mano derecha, si se ve en la dirección de las agujas de un reloj, la terna es de mano izquierda.

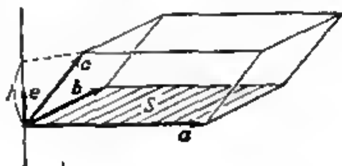
D e m o s t r a c i ó n. Supongamos, primero, que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ n o s o n c o l i n e a l e s. Designemos con la letra S el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y con la letra $\boldsymbol{e}$, el vector unitario definido como en el nº 170. Según la fórmula (2), nº 170, se tiene:

$$[\boldsymbol{ab}] = S\boldsymbol{e}.$$

De aquí que

$$[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c} = S(\boldsymbol{ec}) = S\,|\boldsymbol{e}|\,\text{pr}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c} = S\,\text{pr}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c}. \tag{1}$$

Pero, $\text{pr}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c} = \pm h$, en donde h es la altura del paralelepípedo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, si por base se toma el paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ (fig. 101) Por lo tanto,



F i g. 101.

designando con la letra V el volumen del paralelepípedo y teniendo en cuenta que $hS = V$, de la igualdad (1) hallamos:

$$[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c} = \pm V. \tag{2}$$

Vamos a determinar ahora en qué casos se toma aquí el signo más y en qué casos el signo menos. Hagamos notar con este fin que $\text{pr}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c} = +h$, si el vector $\boldsymbol{c}$ está situado en el mismo lado respecto al plano de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, en el que está situado el vector $\boldsymbol{e}$, es decir, si la terna $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ es de la misma orientación que la terna $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{e}$ (véase el nº 178); $\text{pr}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c} = -h$, si los vectores $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{e}$ están situados a diversos lados respecto al plano de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, es decir, si las ternas $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{e}$ son de orientación distinta. Pero, por la definición del vector $\boldsymbol{e}$ (véase nº 170), la terna $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{e}$, es de mano derecha. Por consiguiente, en la fórmula (2) se toma el signo más, si la terna $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ es de mano derecha, y el signo menos, si es de mano izquierda. Si el vector $\boldsymbol{c}$ está situado en el plano de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, es decir, si los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ son coplanares, $\text{pr}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c} = 0$ y, como se ve de la igualdad (1), $[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c} = 0$. De este modo, todo lo que afirmaba el teorema queda demostrado, pero con la condición de que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ no sean colineales. Queda por estudiar el caso en que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ son c o l i n e a l e s. En este caso, $[\boldsymbol{ab}] = 0$ y, por consiguiente, $[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c} = 0$, lo cual también está en concordancia con el enunciado del teorema, puesto que, si los vectores

$\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales, los tres vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ son coplanares. El teorema queda demostrado.

181. Del teorema 22 fácilmente se deduce la siguiente identidad:

$$[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]. \quad (3)$$

Demostración. Como en el producto escalar se pueden permutar los factores, se tiene:

$$\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]=[\boldsymbol{bc}]\boldsymbol{a}. \quad (4)$$

Por el teorema 22, resulta:

$$[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}=\pm V, \ [\boldsymbol{bc}]\boldsymbol{a}=\pm V. \quad (5)$$

Según el nº 179, las ternas $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}$ son de una misma orientación; por eso, y por el teorema 22, en los segundos miembros de las igualdades (5) se tiene que tomar un mismo signo. Por lo tanto, de las igualdades (5), se tiene:

$$[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{bc}]\boldsymbol{a}.$$

De aquí y por la igualdad (4),

$$[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}],$$

que es lo que se afirmaba.

182. A continuación los productos mixtos $[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]$ se representarán por la notación más simple: $\boldsymbol{abc}$. Aunque no está indicado qué vectores se multiplican vectorialmente, no habrá ningún motivo de equivocación, puesto que $[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]$.

183. Subrayemos que del teorema 22 se deduce inmediatamente la siguiente afirmación:

El producto mixto de los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ es igual a cero, cuando, y sólo cuando, los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ son coplanares.

En efecto, que $\boldsymbol{abc}=0$, cuando los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ son coplanares, se afirma en el teorema 22. Que $\boldsymbol{abc}=0$ sólo cuando los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ son coplanares, se deduce de este mismo teorema; precisamente, si los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ no son coplanares, el volumen del paralelepípedo construido sobre estos vectores es diferente de cero y, por consiguiente, $\boldsymbol{abc}\neq 0$. Esta misma proposición se puede enunciar también así:

Condición necesaria y suficiente para que tres vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ sean coplanares es la igualdad a cero de su producto mixto: $\boldsymbol{abc}=0$.

§ 58. Expresión del producto mixto mediante las coordenadas de los vectores que se multiplican

184. Teorema 23. *Si los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ se han dado mediante sus coordenadas:*

$$\boldsymbol{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\ \boldsymbol{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},\ \boldsymbol{c}=\{X_3;\ Y_3;\ Z_3\},$$

su producto mixto $\boldsymbol{abc}$ *se determina por la fórmula*

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Demostración. Se tiene, $\boldsymbol{abc}=[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$. Por el teorema 21 (nº 173),

$$[\boldsymbol{ab}]=\left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}; \quad -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

Hallando el producto escalar de este vector por el vector $\boldsymbol{c}=\{X_3; Y_3; Z_3\}$ y aplicando el teorema 20 (nº 164), obtenemos:

$$\boldsymbol{abc}=[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} X_3-\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} Y_3+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} Z_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo. Dados cuatro puntos en el espacio: $A(1; 1; 1)$, $B(4; 4; 4)$, $C(3; 5; 5)$, $D(2; 4; 7)$, hallar el volumen del tetraedro $ABCD$.

Solución. Como se sabe por la geometría elemental, el volumen V_T del tetraedro $ABCD$ es igual a una sexta parte del paralelepípedo construido sobre los vectores $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$; de aquí y del teorema 22, se deduce que V_T es igual a una sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}$. Queda por calcular este producto mixto. Ante todo, hallamos las coordenadas de los vectores $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Por el teorema 15, nº 135, se tiene: $\overline{AB}=\{3; 3; 3\}$, $\overline{AC}=\{2; 4; 4\}$, $\overline{AD}=\{1; 3; 6\}$.

Aplicando ahora el teorema 23, obtenemos:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=18.$$

De aquí que $V_T=3$.

185. Según el nº 183, *la condición necesaria y suficiente para que tres vectores sean coplanares es que su producto mixto sea igual a cero.*

De esto y del teorema 23 se deduce que: *si los vectores* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *están dados por sus coordenadas:*

$$\boldsymbol{a}=\{X_1; Y_1; Z_1\}, \ \boldsymbol{b}=\{X_2; Y_2; Z_2\}, \ \boldsymbol{c}=\{X_3; Y_3; Z_3\},$$

la condición necesaria y suficiente para que estos vectores sean coplanares es que se cumpla la igualdad

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, que sea igual a cero el determinante de tercer orden formado por las coordenadas de los vectores ***a***, ***b***, ***c***.

11.

ECUACION DE UNA SUPERFICIE Y ECUACIONES DE UNA LINEA

§ 59. Ecuación de una superficie

186. Como se sabe, algunos problemas elementales sobre las superficies (plano, esfera, cilindro circular, cono circular) se estudian fácilmente con los medios de la geometría analítica. Pero el problema general del estudio de la inmensa variedad de superficies que aparecen en diferentes problemas de las mismas matemáticas y de sus aplicaciones, demanda métodos más perfectos del álgebra y del análisis. La aplicación de los métodos del álgebra y del análisis se basa en un procedimiento uniforme de expresión de las superficies, según el cual, éstas se dan mediante ecuaciones.

187. Sean x, y, z cantidades arbitrarias variables. Esto significa que los símbolos x, y, z denotan números (reales) cualesquiera. La relación $F(x, y, z) = 0$, en donde $F(x, y, z)$ denota una expresión que contiene x, y, z, se llama ecuación de tres variables x, y, z, si $F(x, y, z) = 0$ representa una igualdad que no siempre se verifica, o sea, que no se verifica para cualquier terna de números x, y, z.

Se dice que tres números $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ **satisfacen** a una ecuación dada de tres variables, si al sustituirlos en esta ecuación en lugar de las variables, ésta se convierte en una igualdad auténtica. Si $F(x, y, z) = 0$ es una identidad, a ésta satisfacen todos los números x, y, z, cualesquiera que éstos sean.

188. La noción más importante de la geometría analítica del espacio es la de la **ecuación de una superficie**. Ahora explicaremos qué es lo que se entiende por esto.

Sea dada alguna superficie en el espacio y supongamos que se ha elegido un sistema de coordenadas.

Una ecuación de tres variables se llama ecuación de una superficie dada (en el sistema de coordenadas elegido), *si a esta ecuación satisfacen las coordenadas de cada punto situado en esta superficie y no satisfacen las de ningún punto situado fuera de ella,*

Por lo tanto, si se conoce la ecuación de una superficie, entonces, para cada punto del espacio se puede resolver el problema: ¿está este punto situado en esta superficie o no lo está? Para esto es suficiente sustituir en la ecuación las coordenadas variables por las del punto analizado; si estas coordenadas satisfacen a la ecuación, el punto está situado en la superficie, de lo contrario, no lo está.

Los métodos de la geometría analítica del espacio están fundamentados en la definición dada; su esencia estriba en que las superficies consideradas se estudian mediante un análisis de sus ecuaciones. Por eso, si la superficie se ha definido geométricamente, su estudio se empieza con la deducción de su ecuación. Pero, en muchos problemas, la ecuación de la superficie desempeña un papel primordial y la misma superficie se considera como algo secundario. Mejor dicho, frecuentemente se da previamente una ecuación y, por consiguiente, queda definida una superficie.

189. Si se ha dado una ecuación y se quiere contestar a la pregunta: ¿«cuál es la superficie que ella determina»? (¿«cuál es la superficie dada por la ecuación»?), resulta cómodo utilizar la siguiente definición:

La superficie determinada por la ecuación dada (en un sistema de coordenadas) es el lugar geométrico de puntos cuyas coordenadas satisfacen a esta ecuación.

Nota. Si $M(x;\ y;\ z)$ es el punto variable de la superficie, x, y, z se llaman *coordenadas variables.*

190. Ejemplo. La ecuación

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2 \tag{1}$$

determina en coordenadas cartesianas rectangulares una esfera, cuyo centro está situado en el punto $C(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$ y cuyo radio es igual a r.

En efecto, si $M(x;\ y;\ z)$ es un punto arbitrario, se tiene, $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}=CM$. De esto queda claro que a la ecuación (1) satisfacen las coordenadas de los puntos, y sólo de los puntos, que están a la distancia r del punto C. Por consiguiente, el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen a esta ecuación, es una esfera de centro $C(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$ y de radio r.

§ 60. Ecuaciones de una línea. El problema de la intersección de tres superficies

191. En geometría analítica del espacio, cada línea se considera como la intersección de dos superficies y, por consiguiente, se determina por dos ecuaciones.

Si $F(x,\ y,\ z)=0$ y $\Phi(x,\ y,\ z)=0$ son las ecuaciones de dos superficies que se cortan por una línea L, ésta es el lugar geomé-

trico de los puntos comunes de las superficies, es decir, de los puntos cuyas coordenadas satisfacen simultáneamente a la ecuación $F(x, y, z)=0$ y a la ecuación $\Phi(x, y, z)=0$.

Así pues, *dos ecuaciones simultáneas*

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z)=0, \\ \Phi(x, y, z)=0 \end{aligned}\right\}$$

determinan la línea L.

Por ejemplo, las ecuaciones simultáneas

$$\left.\begin{aligned} (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{aligned}\right\}$$

determinan conjuntamente una circunferencia (como la intersección de dos esferas).

192. Si $F(x, y, z)=0$, $\Phi(x, y, z)=0$, $\Psi(x, y, z)=0$ son las ecuaciones de tres superficies, cada solución simultánea del sistema

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z)=0, \\ \Phi(x, y, z)=0, \\ \Psi(x, y, z)=0 \end{aligned}\right\}$$

proporciona las coordenadas de un punto común de estas superficies. Por lo tanto, *el problema geométrico de hallar los puntos de intersección de tres superficies es equivalente al problema algebraico de resolución simultánea de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.*

Ejemplo. Hallar los puntos de intersección de tres superficies si se sabe que la primera es una esfera con centro en $(-1;\ -1;\ 0)$ de radio 5, la segunda, una esfera con centro en $(1;\ 1;\ 3)$ de radio 4, y la tercera, un plano paralelo al plano Oxy, situado en el semiespacio superior a la distancia de tres unidades del plano Oxy.

Solución. El problema se reduce a la resolución simultánea de tres ecuaciones

$$\begin{aligned} (x+1)^2+(y+1)^2+z^2=25, \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16, \\ z=3. \end{aligned}$$

Poniendo en las dos primeras ecuaciones $z=3$ y abriendo paréntesis, se tiene:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2x+2y=14, \\ x^2+y^2-2x-2y=14. \end{aligned}$$

De aquí que $x+y=0$, $x^2+y^2=14$; por lo tanto, $x=\pm\sqrt{7}$, $y=-x$. Así pues, obtenemos dos puntos: $(\sqrt{7};\ -\sqrt{7};\ 3)$ y $(-\sqrt{7};\ \sqrt{7};\ 3)$.

§ 61. Ecuación de una superficie cilíndrica de generatrices paralelas a uno de los ejes coordenados

193. Vamos a estudiar, en particular, la ecuación de la forma $F(x, y)=0$. Una de las particularidades de esta ecuación es que en ella no figura la variable z. Esto significa que la ecuación dada

relaciona solamente las dos primeras coordenadas, la tercera coordenada puede tomar cualquier valor.

Vamos a demostrar *que una ecuación de esta forma determina una superficie cilíndrica con generatrices paralelas al eje Oz.*

Designemos con la letra S la superficie determinada por una ecuación de la forma $F(x, y)=0$. Sea $M_0(x_0; y_0; z_0)$ un punto arbitrario de la superficie S. Como el punto M_0 está situado en la superficie S, los números x_0, y_0, z_0 satisfacen a la ecuación

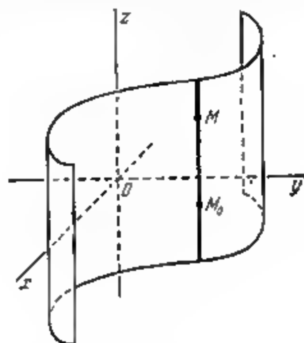


Fig. 102.

$F(x, y)=0$; pero, entonces, los números x_0, y_0, z, en donde z es un número cualquiera, también satisfacen a esta ecuación, puesto que $F(x, y)$ no depende de z. Por consiguiente, para cualquier z el punto $M(x_0; y_0; z)$ está situado en la superficie S (fig. 102). Esto significa que en la superficie S está situada la recta que pasa por el punto M_0 y es paralela al eje Oz. Por lo tanto, la superficie S está formada por rectas paralelas al eje Oz, o sea, es una superficie cilíndrica y está situada tal y como afirmábamos.

Señalemos que en el plano Oxy, en el sistema de coordenadas dado por los ejes Ox y Oy, la ecuación $F(x, y)=0$ determina una línea, precisamente, la *directriz* del cilindro considerado. Pero esta misma línea en el sistema coordenado del espacio tiene que ser dada por dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y)&=0, \\ z&=0. \end{aligned}\right\}$$

Ejemplo. En el sistema coordenado del espacio, la ecuación $x^2+y^2=r^2$ determina un cilindro circular; la directriz de este cilindro (una circunferencia), que está situada en el plano Oxy se determina por dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=r^2 \\ z&=0. \end{aligned}\right\}$$

194. Por analogía con lo anterior, es fácil comprender que la ecuación $F(x, z)=0$ (en el espacio) determina una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Oy; la ecuación $F(y, z)=0$ determina una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Ox.

195. Consideremos una línea L en el espacio, determinada por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z)=0, \\ \Phi(x, y, z)=0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Sea

$$\Psi(x, y)=0 \tag{2}$$

la *ecuación obtenida del sistema* (1), *después de haber eliminado la variable z*. Esto significa que:

1) la ecuación (2) es c o n s e c u e n c i a del sistema (1), es decir, que cada vez que tres números x, y, z satisfacen a las dos ecuaciones del sistema (1), los dos primeros números satisfacen a la ecuación (2);

2) Si dos números, x, y, satisfacen a la ecuación (2), existe un tercer número z tal, que los tres números x, y, z satisfacen a las dos ecuaciones del sistema (1).

De acuerdo a lo dicho en el nº 193, la ecuación (2) determina una superficie cilíndrica con las generatrices paralelas al eje Oz. Como consecuencia de la primera de las propiedades señaladas de la ecuación (2), cada punto de la línea L está situado en la superficie cilíndrica, es decir, esta superficie pasa por la línea L. Por último, como consecuencia de la segunda propiedad, cada generatriz de esta superficie pasa por un punto de la línea L. De todo lo dicho, llegamos a la conclusión de que la superficie determinada por la ecuación $\Psi(x, y)=0$ está formada por rectas que proyectan los puntos de la línea L sobre el plano Oxy; en virtud de esto, se dice *que ésta es una superficie cilíndrica que proyecta la línea L sobre el plano Oxy* (o simplemente, «*cilindro proyectante*»).

La proyección de la línea L sobre el plano Oxy se determina por las dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \Psi(x, y)=0, \\ z=0. \end{aligned}\right\}$$

De modo análogo, eliminando en el sistema (1) la variable x o la variable y se puede obtener la proyección de la línea L sobre el plano Oyz o sobre el plano Oxz.

E j e m p l o. Dada una circunferencia por la intersección de dos esferas,

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

hallar su proyección sobre el plano Oxy.

Solución. Se necesita hallar la ecuación del cilindro que proyecta la circunferencia dada sobre el plano Oxy. Para esto hay que eliminar z entre las ecuaciones (3). Restando la segunda de las ecuaciones del sistema (3) de la primera, obtenemos:

$$y+z=1, \tag{4}$$

de donde $z=1-y$. Sustituyendo z por la expresión $1-y$, en cualquiera de las ecuaciones dadas, hallamos:

$$x^2+2y^2-2y=0, \tag{5}$$

siendo éste el resultado que buscábamos de la eliminación de z en el sistema (3).

En efecto, la ecuación (5) es consecuencia de las ecuaciones (3). Además, si x e y satisfacen a la ecuación (5), de la primera de las ecuaciones (3) resulta

$$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}=\pm\sqrt{1+2y^2-2y-y^2}=\pm(1-y);$$

de la segunda ecuación del sistema (3) se tiene

$$z-1=\pm\sqrt{1-x^2-(y-1)^2}=\pm\sqrt{1+2y^2-2y-y^2+2y-1}=\pm y.$$

Por lo tanto, si dos números, x e y, satisfacen a la ecuación (5), existe un tercer número z, precisamente $z=1-y$ tal, que los tres números x, y, z satisfacen a ambas ecuaciones del sistema (3).

Vemos pues, que las dos condiciones (véase este mismo número más arriba) a las cuales debe satisfacer el resultado de la eliminación de z en el sistema (3), se cumplen para las ecuaciones (5). De acuerdo a lo dicho anteriormente, la ecuación (5) determina un cilindro que proyecta la circunferencia dada sobre el plano Oxy. La misma proyección se da por las dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^2+2y^2-2y=0, \\ z=0. \end{aligned}\right\}$$

Como la primera ecuación se reduce a la forma

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1,$$

la proyección hallada es una elipse de semiejes $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b=\frac{1}{2}$.

§ 62. Superficies algebraicas

196. El objeto principal de la geometría analítica del espacio es el estudio de las superficies determinadas por ecuaciones algebraicas respecto a las coordenadas cartesianas rectangulares. Estas son ecuaciones de la forma:

$$Ax+By+Cz+D=0; \tag{1}$$

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+ \\ +2Kz+L=0; \tag{2}$$

. . . .

Aquí A, B, C, D, E, etc., son números determinados; éstos se llaman coeficientes de las ecuaciones indicadas.

La ecuación (1) se llama *ecuación general de primer grado* (los valores numéricos de sus coeficientes pueden ser cualesquiera, pero con la condición de que esta ecuación contenga realmente términos

de primer grado, es decir, que se excluye la anulación simultánea de A, B, C); la ecuación (2) se llama *ecuación general de segundo grado* (los valores numéricos de sus coeficientes pueden ser cualesquiera, pero con la condición de que esta ecuación contenga realmente términos de segundo grado, es decir, que se excluye el caso, en que sean simultáneamente nulos los seis coeficientes A, B, C, D, E, F). Una forma análoga tienen las ecuaciones de tercero, cuarto grado, etc.

La superficie que en algún sistema de coordenadas cartesiano rectangulares se determina por una ecuación algebraica de grado n se llama superficie algebraica de n—ésimo orden.

Se puede demostrar que la superficie que en algún sistema cartesiano de coordenadas rectangulares se determina por una ecuación algebraica de grado n, se determina también por una ecuación algebraica del mismo grado n en cualquier otro sistema de coordenadas semejantes. La demostración se efectúa tal y como se demostraba en el teorema 8 del n° 49, y se basa en las fórmulas de transformación de las coordenadas cartesianas rectangulares en el espacio.

197. La teoría general de las superficies algebraicas es objeto de trabajos especiales de geometría analítica. En este libro se estudian solamente las superficies de primero y segundo orden.

12.

EL PLANO COMO SUPERFICIE DE PRIMER ORDEN. ECUACIONES DE LA RECTA

§ 63. El plano como superficie de primer orden

En los párrafos inmediatos se establece que las superficies de primer orden son planos, y solamente planos, examinándose diferentes formas de escritura para las ecuaciones de los mismos.

198. Teorema 24. *Cada plano se determina, en coordenadas cartesianas, por una ecuación de primer grado.*

Demostración. Suponiendo dado un sistema de coordenadas cartesiano rectangular, consideremos un plano arbitrario α y demostremos que este plano se determina por una ecuación de primer grado. Tomemos en el plano α un punto $M_0(x_0; y_0; z_0)$; elijamos, además, un vector cualquiera (diferente de cero) que sea perpendicular al plano α. Designemos el vector elegido con la letra $\boldsymbol{n}$, sus proyecciones sobre los ejes coordenados, con las letras A, B, C. Sea $M(x, y, z)$ un punto arbitrario. Este punto está situado en el plano α cuando, y sólo cuando, el vector $\overline{M_0M}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$, o sea, que el punto M situado en el plano α se caracterizan por la condición

$$\overline{M_0M} \perp \boldsymbol{n}.$$

Para obtener la ecuación del plano α hay que expresar esta condición en coordenadas x, y, z. Escribamos con este fin las coordenadas de los vectores $\overline{M_0M}$ y $\boldsymbol{n}$:

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\},$$
$$\boldsymbol{n} = \{A;\ B;\ C\}.$$

De acuerdo al nº 165, el criterio de perpendicularidad de dos vectores es la igualdad a cero de su producto escalar, o sea, de la suma de los productos de las coordenadas correspondientes de

estos vectores. Así pues, $\overline{M_0M} \perp \boldsymbol{n}$ cuando, y sólo cuando,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

Esta es la ecuación buscada del plano α, puesto que a ésta satisfacen las coordenadas x, y, z de un punto M si, y sólo si, el punto M está situado en el plano α (o sea, si $M_0M \perp \boldsymbol{n}$).

Abriendo paréntesis, representamos la ecuación (1) de la forma:

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0.$$

Designando ahora el número $-Ax_0-By_0-Cz_0$ con la letra D, se tiene:

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (2)$$

Vemos, que el plano α se determina verdaderamente por una ecuación de primer grado, con lo que el teorema queda demostrado.

199. Todo vector (diferente de cero) perpendicular a un plano se llama vector *normal* del plano. Empleando esta denominación podemos decir que la *ecuación*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

es la ecuación de un plano que pasa por el punto $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *y cuyo vector normal es* $\boldsymbol{n}=\{A;\ B;\ C\}$.

La ecuación de la forma

$$Ax+By+Cz+D=0$$

se llama *ecuación general* del plano.

200. Teorema 25. *Toda ecuación de primer grado en coordenadas cartesianas determina un plano.*

Demostración. Suponiendo dado un sistema cartesiano rectangular de coordenadas, consideremos una ecuación arbitraria de primer grado

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (2)$$

Cuando decimos, ecuación «arbitraria», queremos señalar que los coeficientes A, B, C, D pueden ser números cualesquiera, pero, claro, se excluye el caso en que los coeficientes A, B, C sean simultáneamente iguales a cero. Tenemos que demostrar que la ecuación (2) es la ecuación de un plano.

Sea x_0, y_0, z_0 una solución de la ecuación (2), es decir, una terna de números que satisfaga a esta ecuación *). Sustituyendo en

---

*) La ecuación (2), así como cualquier ecuación de primer grado con tres incógnitas tiene una infinidad de soluciones. Para hallar cualquiera de ellas hay que dar valores numéricos a dos de las incógnitas y hallar la tercera incógnita de la ecuación.

el primer miembro de la ecuación (2) las coordenadas variables por los números x_0, y_0, z_0, obtenemos la identidad aritmética

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \tag{3}$$

Restando la identidad (3) de la ecuación (2), resulta

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{1}$$

que, por lo anterior, representa la ecuación de un plano que pasa por el punto $M_0(x_0; y_0; z_0)$ y cuyo vector normal es $\boldsymbol{n}=\{A; B; C\}$. Pero la ecuación (2) es equivalente a la ecuación (1), puesto que ésta se ha obtenido de la (2), restando la identidad (3), y, por su parte, la (2) se obtiene de la ecuación (1), sumando a ésta la identidad (3). Por consiguiente, la (2) es la ecuación del mismo plano.

Hemos demostrado que una ecuación arbitraria de primer grado representa un plano; por consiguiente, el teorema queda demostrado.

201. Como ya sabemos, las superficies que en coordenadas cartesianas se determinan por ecuaciones de primer grado se llaman superficies de primer orden. Usando esta terminología, podemos expresar los resultados obtenidos así:

Todo plano es una superficie de primer orden; toda superficie de primer orden es un plano.

Ejemplo. Hallar la ecuación de un plano que pasa por el punto $M_0(1; 1; 1)$ y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}=\{2; 2; 3\}$.

Solución. Por el nº 199, la ecuación buscada es

$$2(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0,$$

o sea,

$$2x+2y+3z-7=0.$$

202. Al terminar este párrafo, demostremos la siguiente proposición: *si dos ecuaciones $A_1x+B_1y+C_1z+D=0$ y A_2x+B_2y+ $+C_2z+D_2=0$ determinan un mismo plano, sus coeficientes son proporcionales.*

En efecto, en este caso, los vectores $\boldsymbol{n}_1=\{A_1; B_1; C_1\}$ y $\boldsymbol{n}_2=$ $=\{A_2; B_2; C_2\}$ son perpendiculares a un mismo plano y, por consiguiente, son colineales entre sí. Pero, entonces, de acuerdo al nº 154, los números A_2, B_2, C_2 son proporcionales a los números A_1, B_1, C_1; designando con μ el coeficiente de proporcionalidad, se tiene: $A_2=A_1\mu$, $B_2=B_1\mu$, $C_2=C_1\mu$. Sea $M_0(x_0; y_0; z_0)$ un punto cualquiera del plano; sus coordenadas tienen que satisfacer a cada una de las ecuaciones dadas, por eso,

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0 \text{ y } A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0.$$

Multipliquemos la primera de estas igualdades por μ y restemos el resultado obtenido de la segunda; se tiene, $D_2-D_1\mu=0$. Por

consiguiente, $D_2 = D_1\mu$ y

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} = \mu.$$

Con esto queda demostrada nuestra afirmación.

§ 64. Ecuaciones incompletas de planos. Ecuación «segmentaria» del plano

203. Sabemos que cada ecuación de primer grado

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(en coordenadas cartesianas) determina un plano. Consideremos ahora algunos casos particulares de la ecuación de primer grado, cuando uno de los coeficientes A, B, C, D se anula:

1) $D = 0$; *la ecuación es de la forma* $Ax + By + Cz = 0$ *y determina un plano que pasa por el origen de coordenadas.*

En efecto, los números $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ satisfacen a la ecuación $Ax + By + Cz = 0$. Por consiguiente, el origen de coordenadas pertenece al plano.

2) $C = 0$; *la ecuación es de la forma* $Ax + By + D = 0$ *y determina un plano paralelo al eje* Oz (o que pasa por este eje).

En efecto, en este caso, la proyección del vector normal $\boldsymbol{n} = \{A; B; C\}$ sobre el eje Oz es igual a cero ($C = 0$); por consiguiente, este vector es perpendicular al eje Oz y el mismo plano es paralelo a este eje (o pasa por él).

3) $B = 0$ y $C = 0$; *la ecuación es de la forma* $Ax + D = 0$ *y determina un plano paralelo al plano coordenado* Oyz (o coincide con él).

En efecto, en este caso, las proyecciones del vector normal $\boldsymbol{n} = \{A; B; C\}$ sobre los ejes Oy y Oz son iguales a cero ($B = 0$ y $C = 0$); por consiguiente, el vector $\boldsymbol{n}$ es perpendicular a los ejes Oy y Oz y el mismo plano es paralelo a éstos (o pasa por cada uno de ellos). Pero esto significa que el plano determinado por la ecuación $Ax + D = 0$ es paralelo al plano Oyz o coincide con él. Podemos convencernos de esto, también, de otra manera: representemos la ecuación $Ax + D = 0$ en la forma $x = -\frac{D}{A}$ y pongamos $-\frac{D}{A} = a$; se tiene:

$$x = a.$$

Según esta ecuación, todos los puntos del plano tienen una misma abscisa ($x = a$) y, por lo tanto, están situados a una misma distancia del plano Oyz («en la parte anterior», si $a > 0$, y, «en la parte posterior», si $a < 0$); por consiguiente, el plano determinado por tal ecuación es paralelo al plano Oyz. De aquí queda también

claro, que a es la magnitud del segmento que el plano intercepta en el eje Ox (partiendo del origen de coordenadas). En particular, si $D=0$, se tiene, $a=0$; en este caso, el plano considerado coincide con el plano Oyz. Por lo tanto, *la ecuación* $x=0$ *determina el plano* Oyz.

204. Por analogía a lo anterior es fácil establecer que:

1. Una ecuación de la forma $Ax+Cz+D=0$ determina un plano paralelo al eje Oy (o que pasa por él); una ecuación de la forma $By+Cz+D=0$ determina un plano paralelo al eje Ox (o que pasa por él).

2. Una ecuación de la forma $By+D=0$ determina un plano paralelo al plano Oxz (o coincide con él); la ecuación $Cz+D=0$ determina un plano paralelo al plano Oxy (o coincide con él). Las dos últimas ecuaciones se pueden escribir en la forma $y=b$ o $z=c$, respectivamente. Aquí, b y c son las magnitudes de los segmentos que interceptan estos planos en los ejes coordenados (el primero, en el eje Oy, el segundo, en el eje Oz). En particular, la ecuación $y=0$ determina el plano Oxz, la ecuación $z=0$ determina el plano Oxy.

205. Sea dada la ecuación de un plano

$$Ax+By+Cz+D=0$$

y supongamos que ninguno de los coeficientes A, B, C, D es igual a cero. Tal ecuación se puede reducir a una forma especial, que suele ser útil en una serie de problemas de geometría analítica.

Pasemos el término independiente D al segundo miembro de la ecuación; se tiene:

$$Ax+By+Cz=-D.$$

Dividamos ahora los dos miembros de la ecuación por $-D$; de lo anterior, obtenemos:

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1,$$

o sea,

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Introduciendo las notaciones

$$a=-\frac{D}{A},\quad b=-\frac{D}{B},\quad c=-\frac{D}{C},$$

obtenemos:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (1)$$

Esta es la forma especial de la ecuación del plano que queríamos obtener. Los números a, b, c tienen aquí un significado geométrico.

sencillo. Precisamente, a, b, c son las magnitudes de los segmentos que el plano intercepta en los ejes coordenados (tomando cada uno desde el origen de coordenadas). Para convencernos de esto, hallemos los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados. El punto de intersección del plano con el eje Ox se determina por la ecuación de este plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ para $y=0$, $z=0$; de aquí que $x=a$ y, por eso, la magnitud del segmento interceptado en el eje Ox por el plano es realmente igual a a. De modo análogo se establece que los segmentos que el plano intercepta en los ejes Oy y Oz tienen magnitudes correspondientemente iguales a b y c.

La ecuación de la forma (1) se llama *ecuación «segmentaria» del plano.*

Ejemplo. Hallar la ecuación del plano, sabiendo que intercepta en los ejes coordenados los segmentos $a=2$, $b=-3$, $c=4$.

Solución. De acuerdo a lo anterior, obtenemos inmediatamente la ecuación buscada:

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1, \text{ o sea } 6x-4y+3z-12=0.$$

§ 65. Ecuación normal del plano. Distancia de un punto a un plano

206. Vamos a considerar otra forma especial más de escritura de la ecuación del plano, conocida con el nombre de ecuación normal del plano.

Dado un plano π, tracemos por el origen de coordenadas una recta n perpendicular al mismo; esta recta se llamará *normal*. Designemos con la letra P el punto en que ésta corta el plano π (fig. 103). Tomemos como dirección positiva en la normal, la del punto O al punto P (si el punto P coincide con el punto O, es decir, si el plano dado pasa por el origen de coordenadas, la dirección positiva en la normal se elige arbitrariamente). Designemos con α, β, γ los ángulos que forma la normal dirigida con los ejes coordenados; con p la longitud del segmento OP.

Vamos a deducir la ecuación del plano dado π, suponiendo que se conocen los números $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ y p. Tomemos con este fin en el plano π un punto arbitrario M y designemos sus coordenadas mediante x, y, z. Es evidente que la proyección del vector $\overline{OM}$ sobre la normal es igual a OP, y como la dirección positiva en la normal coincide con la dirección del segmento $\overline{OP}$, la magnitud de este segmento viene expresada por un número positivo, precisamente, por el número p; así pues,

$$\text{pr}_n\overline{OM}=p. \qquad (1)$$

Obsérvese ahora que $\overline{OM}=\{x;\ y;\ z\}$. De aquí y de acuerdo al

corolario 3 del teorema 20 (nº 165)

$$\text{pr}_n\overline{OM} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma. \qquad (2)$$

De las igualdades (1) y (2), se deduce que $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$, o sea,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (3)$$

Esta es la ecuación del plano dado (como vemos, a ella satisfacen las coordenadas x, y, z de cada punto M situado en el plano; si

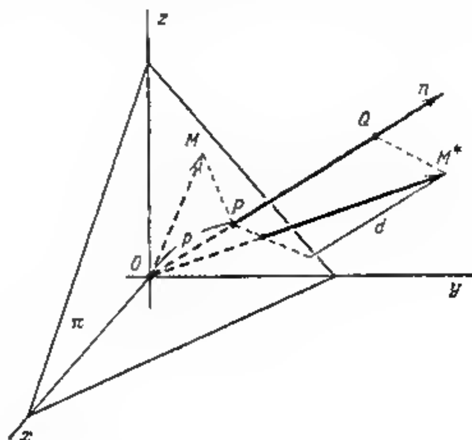


Fig. 103.

el punto M no está situado en el plano dado, sus coordenadas no satisfacen a la ecuación (3), puesto que $\text{pr}_n\overline{OM} \neq p$).

La ecuación del plano en la forma (3), *se llama ecuación normal del plano; en esta ecuación* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *son los cosenos directores de la normal, p es la distancia del origen de coordenadas al plano.*

207. Dado un plano arbitrario, tracemos su normal n y asignemos en la normal una dirección positiva, del modo como fue indicado en el nº anterior. Supongamos ahora dado un punto cualquiera M^* en el espacio y que d es su distancia al plano (véase la fig. 103).

Llamaremos «desviación»* del punto M^* del plano dado, al número $+d$, si el punto M^* está situado en la

* Véase la N. del T. al final de la pág. 70. (N. del T.).

región del plano adonde va dirigida la dirección positiva de la normal, y al número $-d$, si el punto M^* está situado en la otra región del plano. La desviación del punto M^*, con respecto al plano, la designaremos con la letra δ; de este modo, $\delta = \pm d$; además, es conveniente tener en cuenta que $\delta = +d$, si el punto M^* y el origen de coordenadas están situados en diferentes regiones del plano, y que $\delta = -d$, si el punto M^* y el origen de coordenadas están en una misma región del plano (para los puntos situados en el plano, $\delta = 0$).

Teorema 26. *Si $(x^*; y^*; z^*)$ son las coordenadas del punto M^* y*

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$$

es la ecuación normal de un plano, la desviación del punto M^* de este plano está dada por la fórmula

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \cos\beta + z^* \cos\gamma - p. \quad (4)$$

Demostración. Proyectemos el punto M^* sobre la normal; sea Q su proyección (véase la fig. 103); entonces,

$$\delta = PQ = OQ - OP,$$

en donde PQ, OQ y OP son las magnitudes respectivas de los segmentos dirigidos $\overline{PQ}$, $\overline{OQ}$ y $\overline{OP}$ de la normal. Pero $OQ = \mathrm{pr}_n \overline{OM^*}$, $OP = p$; por consiguiente,

$$\delta = \mathrm{pr}_n \overline{OM^*} - p. \quad (5)$$

Por el corolario 3 del teorema 20 (nº 165)

$$\mathrm{pr}_n \overline{OM^*} = x^* \cos\alpha + y^* \cos\beta + z^* \cos\gamma. \quad (6)$$

De las igualdades (5) y (6) obtenemos:

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \cos\beta + z^* \cos\gamma - p.$$

Por consiguiente, el teorema queda demostrado.

Conviene tener en cuenta que $x^* \cos\alpha + y^* \cos\beta + z^* \cos\gamma - p$ es el primer miembro de la ecuación normal del plano dado, en donde, en vez de las coordenadas variables, figuran las coordenadas del punto M^*.

De aquí resulta la regla siguiente:

Para hallar la desviación de un punto M^* de un plano hay que sustituir, en el primer miembro de la ecuación normal del plano, las coordenadas variables por las del punto M^*. El resultado obtenido será igual a la desviación buscada.

Nota. Si se pide hallar la distancia del punto al plano, será suficiente calcular la desviación por la regla indicada y tomar después su valor absoluto.

208. Vamos a deducir ahora cómo se puede reducir la ecuación general del plano a la forma normal. Sea

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{7}$$

la ecuación general de un plano, y

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0, \tag{3}$$

su ecuación normal.

Como las ecuaciones (7) y (3) determinan un mismo plano, los coeficientes de estas ecuaciones, por el nº 202, serán proporcionales. Esto significa que, si multiplicamos todos los términos de la ecuación (7) por un factor μ, se obtiene la ecuación

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0,$$

que coincide con la ecuación (3), y, por lo tanto, se tiene:

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \cos\beta, \quad \mu C = \cos\gamma, \quad \mu D = -p. \tag{8}$$

Para hallar el factor μ, sumemos las primeras tres igualdades elevadas previamente al cuadrado; obtenemos:

$$\mu^2 (A^2 + B^2 + C^2) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Pero, según el nº 140, el segundo miembro de la última igualdad es igual a la unidad. Por lo tanto,

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{9}$$

El número μ, por el que hay que multiplicar la ecuación general del plano para que tome la forma normal, se llama *factor normalizador* de esta ecuación. El factor normalizador se determina por la fórmula (9), pero no por completo: queda por determinar su signo. Para determinar el signo del factor normalizador utilizamos la cuarta de las igualdades (8). Según esta igualdad, $\mu D = -p$, o sea, μD es un número negativo. Por lo tanto:

El signo del factor normalizador es contrario al signo del término independiente de la ecuación que se normaliza.

Nota. Si $D = 0$, el signo del factor normalizador se puede elegir como se desee.

Ejemplo. Dado el plano $3x - 4y + 12z + 14 = 0$ y el punto $M(4; 3; 1)$, hallar la desviación del punto M del plano dado.

Solución. Para aplicar la regla expuesta en el nº 207, es necesario, ante todo, reducir la ecuación dada a la forma normal.

Con este fin, hallamos el factor normalizador:

$$\mu = \frac{-1}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = -\frac{1}{13}.$$

Multiplicando esta ecuación por μ, obtenemos la ecuación normal del plano que se pedía:

$$-\frac{1}{13}(3x - 4y + 12z + 14) = 0.$$

Sustituyendo en el primer miembro de esta ecuación las coordenadas del punto M, se tiene:

$$\delta = -\frac{1}{13}(3\cdot 4 - 4\cdot 3 + 12\cdot 1 + 14) = -2.$$

Luego la desviación del punto M del plano dado es negativa y el punto está a la distancia $d=2$ de él.

§ 66. Ecuaciones de la recta

209. Como ya se indicó en el nº 191, en la geometría analítica del espacio cada línea se considera como la intersección de dos superficies y se determina por dos ecuaciones. En particular, vamos a considerar la línea recta como la intersección de dos planos y, correspondientemente a esto, la vamos a definir por dos ecuaciones de primer grado (claro que en coordenadas cartesianas.)

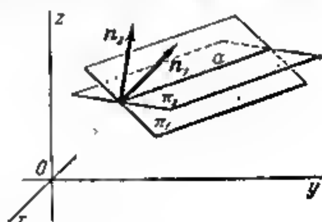


Fig. 104.

Supongamos que se ha establecido en el espacio un sistema cartesiano rectangular de coordenadas. Consideremos una recta arbitraria; designémosla con la letra a (fig. 104). Designemos por π_1 y π_2 dos planos diferentes cualesquiera que se corten por la recta a, y supongamos que se conocen las ecuaciones de estos planos; escribámoslas en la forma

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ y } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Como la recta a representa la intersección de dos planos π_1 y π_2, ésta se determina por dos ecuaciones simultáneas:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

210. Imaginémonos dadas previamente dos ecuaciones de primer grado (supongamos que están escritas en la forma (1)).

¿Representan siempre éstas, simultáneamente, alguna recta? Evidentemente, éstas representarán alguna recta cuando, y sólo cuando, los planos correspondientes a ellas no sean paralelos entre sí y no coincidan, es decir, cuando los vectores normales de estos

planos, $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ y $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ no sean colineales. Recordando que la condición para que dos vectores sean colineales es que sus coordenadas sean proporcionales (véase nº 154), llegamos a la conclusión de que:

Dos ecuaciones simultáneas de la forma (1) *determinan una recta cuando, y sólo cuando, los coeficientes* A_1, B_1, C_1 *de una de ellas no son proporcionales a los coeficientes* A_2, B_2, C_2 *de la otra.*

211. Por cada recta pasa una infinidad de planos distintos; está claro, que existe una infinidad de posibilidades para la elección de dos de ellos. De aquí que cualquier recta se puede determinar por dos ecuaciones de una infinidad de maneras diferentes. Vamos a indicar ahora un método muy sencillo que permite, *partiendo de las ecuaciones de dos planos que pasan por una recta dada, «formar» con ellos cuantas nuevas ecuaciones se quiera, cada una de las cuales determina un plano que también pasa por la recta dada.*

Sea dada alguna recta a y las ecuaciones de dos planos diferentes π_1 y π_2 que pasan por esta recta:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ y } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Tomemos dos números cualesquiera α, β, no simultáneamente iguales a cero y consideremos la igualdad

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (2)$$

o escribiéndola de otra forma:

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2)z + (\alpha D_1 + \beta D_2) = 0. \quad (3)$$

Es fácil ver que los tres números $\alpha A_1 + \beta A_2$, $\alpha B_1 + \beta B_2$ y $\alpha C_1 + \beta C_2$ no pueden ser simultáneamente iguales a cero. En efecto, si $\alpha A_1 + \beta A_2 = 0$, $\alpha B_1 + \beta B_2 = 0$, $\alpha C_1 + \beta C_2 = 0$, se tendrá que

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \ \frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \ \frac{C_1}{C_2} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Como los números α y β no son simultáneamente iguales a cero, la razón $\frac{\beta}{\alpha}$ no puede ser indeterminada; por eso, de las proporciones anteriores se deduce que A_1, B_1, C_1 son proporcionales a A_2, B_2, C_2, es decir, que los vectores normales de los planos dados $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ y $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ son colineales; pero esto es imposible, puesto que los planos dados no son paralelos y no son coincidentes.

Como los tres números $\alpha A_1 + \beta A_2$, $\alpha B_1 + \beta B_2$ y $\alpha C_1 + \beta C_2$ no se pueden anular simultáneamente, la igualdad (3) es una ecuación. Claro está que ésta es una ecuación de primer grado y, por consiguiente, determina un plano.

Como, además, la ecuación (3) es consecuencia de las ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, cada terna de números $(x;\ y;\ z)$ que satisface a estas dos ecuaciones, satisface también a la ecuación (3). De esto llegamos a la conclusión,

que cada punto situado en la intersección de los planos π_1 y π_2 está también situado en el plano determinado por la ecuación (3). Mejor dicho, la ecuación (3) (o su ecuación equivalente (2)) determina un plano que pasa por la recta a. Así pues, *si*

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \;\; y \;\; A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

son las ecuaciones de dos planos que pasan por una recta, la ecuación

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (2)$$

determina un plano que pasa por la misma recta.

Aplicando esta proposición, se pueden simplificar las ecuaciones de la recta. Por ejemplo, las ecuaciones de la recta

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+3&=0,\\ x+y-z-5&=0 \end{aligned}\right\}$$

se pueden sustituir por otras más simples, efectuando una combinación de las mismas, tomando primero $\alpha=1$, $\beta=1$ y, después, $\alpha=1$, $\beta=-1$; de este modo, obtenemos las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y-1&=0,\\ z+4&=0, \end{aligned}\right\}$$

que determinan la misma recta que la que determinaban las primeras ecuaciones dadas.

212. Supongamos que una recta dada a está determinada por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0 \end{aligned}\right\}$$

como intersección de dos planos π_1 y π_2. Ya sabemos que para cualesquiera valores numéricos de α, β (no iguales a cero simultáneamente) la ecuación

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (2)$$

determina un plano que pasa por la recta a. Demostremos que siempre se pueden elegir los valores α y β de tal modo, que la ecuación (2) determine un plano previamente asignado que pase por la recta a.

Como cada plano que pasa por la recta a se determina, además de la recta a, por uno de sus puntos, para la demostración de la afirmación enunciada es suficiente demostrar que siempre se pueden elegir los números α y β en la ecuación (2) de tal modo, que el plano determinado por ella pase por cualquier punto $M^*(x^*, y^*, z^*)$ previamente asignado.

Pero, esto está claro; en efecto, el plano determinado por la ecuación (2) pasará por el punto M^*, si las coordenadas del punto M^* satisfacen a esta ecuación, es decir, si

$$\alpha(A_1x^*+B_1y^*+C_1z^*+D_1)+\beta(A_2x^*+B_2y^*+C_2z^*+D_2)=0. \qquad (4)$$

Vamos a suponer que el punto M^* no está situado en la recta a (sólo este caso nos interesa). Entonces, por lo menos uno de los números $A_1x^* + B_1y^* + C_1z^* + D_1$, $A_2x^* + B_2y^* + C_2z^* + D_2$ es diferente de cero, por consiguiente, la igualdad (4) es una ecuación de primer grado con dos incógnitas, α y β. Para hallar las incógnitas α y β hay que asignar a una de ellas un valor numérico arbitrario y la otra hallarla por la ecuación; por ejemplo, si $A_2x^* + B_2y^* + C_2z^* + D_2 \neq 0$, se puede tomar α arbitrariamente (diferente de cero), y β se halla entonces por la fórmula:

$$\beta = -\frac{A_1x^* + B_1y^* + C_1z^* + D_1}{A_2x^* + B_2y^* + C_2z^* + D_2}\alpha.$$

En resumen, una ecuación de la forma (2) puede determinar un plano que pase por un punto cualquiera del espacio previamente asignado y, por consiguiente, cualquier plano que pase por la recta dada a.

213. *El conjunto de todos los planos que pasan por una misma recta se llama haz de planos. La ecuación de la forma* (2) *se llama ecuación del haz de planos*, puesto que, variando en ella los valores respectivos de α y β, se obtienen todos los planos de un haz.

Si $\alpha \neq 0$, haciendo $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, de la ecuación (2) se obtiene

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \qquad (5)$$

Esta ecuación del haz de planos es más usual para la resolución de problemas que la ecuación (2). Es importante notar que, al pasar de la ecuación (2) a la ecuación (5), se excluye el caso en que $\alpha = 0$ y, por eso, de la ecuación (5) no se puede determinar el plano $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, o sea, para diversos valores de λ, la ecuación de la forma (5) determina todos los planos del haz, menos uno (menos el segundo de los dos dados).

§ 67. Vector director de la recta. Ecuaciones canónicas de la recta. Ecuaciones paramétricas de la recta

214. Para mayor comodidad, en la resolución de una serie de problemas de geometría analítica, se usa una forma especial de ecuaciones de la recta que exponemos a continuación. Esta forma especial de ecuaciones de la recta puede ser obtenida de sus ecuaciones generales mediante transformaciones algebraicas; sin embargo, preferimos obtenerla directamente; de este modo, con mayor claridad se revelará su esencia geométrica.

Sea dada una recta. *Todo vector, diferente de cero, situado en la misma o en una recta paralela a ella, se llama vector director de esta recta*. Los vectores indicados se llaman directores, precisamente, porque cada uno de ellos determina la dirección de la recta.

El vector director de una recta arbitraria se designará con la letra $\boldsymbol{a}$, sus coordenadas, con las letras l, m, n:

$$\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}.$$

Vamos a deducir, seguidamente, *las ecuaciones de la recta que pasa por un punto dado $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ y que tiene un vector director dado $\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}$.*



Fig. 105.

Estas ecuaciones se obtienen fácilmente. Sea $M(x;\ y;\ z)$ un punto («variable») arbitrario de la recta (fig. 105). El vector

$$\overline{M_0M}=\{x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0\}$$

es colineal al vector director

$$\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}.$$

Por lo tanto, las coordenadas del vector $\overline{M_0M}$ son proporcionales a las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (1)$$

Como vemos, a estas relaciones satisfacen las coordenadas de cada punto $M(x;\ y;\ z)$ situado en la recta considerada; por el contrario, si el punto $M(x;\ y;\ z)$ no está situado en esta recta, sus coordenadas no satisfacen a las relaciones (1), puesto que, en este caso, los vectores $\overline{M_0M}$ y $\boldsymbol{a}$ no son colineales y sus coordenadas no son proporcionales. Por lo tanto, las ecuaciones (1) representan las de la recta que pasa por el punto $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ en dirección del vector $\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}$.

Las ecuaciones obtenidas de la recta, en esta forma especial, se llaman ecuaciones *canónicas*.

Las coordenadas l, m, n de cualquier vector director $\boldsymbol{a}$ de la recta, se llaman *parámetros directores* de la misma. Los cosenos directores del vector $\boldsymbol{a}$, se llaman *cosenos directores* de la recta.

215. Sea dada una recta por dos ecuaciones g e n e r a l e s:

$$\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Veamos ahora el modo de hallar las ecuaciones canónicas de esta recta.

Denotemos por π_1 y π_2 los planos determinados por estas ecuaciones y por $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$, los vectores normales de estos planos. Para hallar las ecuaciones canónicas de esta recta es necesario:

1) hallar alguno de sus puntos $M_0(x_0; y_0; z_0)$; para esto hay que atribuir un valor numérico a una de las coordenadas $x_0; y_0; z_0$ y sustituirla en la ecuación (2) en lugar de la variable correspondiente; después de esto, las otras dos coordenadas se determinan resolviendo simultáneamente las ecuaciones (2);

2) hallar el vector director $\boldsymbol{a}=\{l; m; n\}$. Como la recta dada se determina por la intersección de los planos π_1, π_2, ésta será perpendicular a cada uno de los vectores $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$ (véase la fig. 104). Por eso, se puede tomar por vector $\boldsymbol{a}$ cualquier vector perpendicular a los vectores $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$, por ejemplo, su producto vectorial: $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2]$. Como ya se conocen las coordenadas de los vectores $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$: $\boldsymbol{n}_1=$ $=\{A_1; B_1; C_1\}$, $\boldsymbol{n}_2=\{A_2; B_2; C_2\}$, para calcular las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}=\{l; m; n\}$ será suficiente aplicar el teorema 21 (nº 173).

Ejemplo. Hallar las ecuaciones canónicas de la recta

$$\left.\begin{aligned}3x+2y+4z-11=0,\\2x+y-3z-1=0.\end{aligned}\right\}$$

Solución. Poniendo, por ejemplo, $x_0=1$, y resolviendo el sistema dado hallamos: $y_0=2$, $z_0=1$; así pues, ya conocemos un punto de la recta: $M_0(1; 2; 1)$. Busquemos ahora el vector director. Se tiene: $\boldsymbol{n}_1=\{3; 2; 4\}$, $\boldsymbol{n}_2=\{2; 1; -3\}$; de aquí que $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{n}_1\ \boldsymbol{n}_2]=\{-10; 17; -1\}$, o sea $l=-10$, $m=17$, $n=-1$.
Las ecuaciones canónicas de la recta dada se obtienen sustituyendo en la igualdad (1) los valores hallados de x_0, y_0, z_0 y l; m; n:

$$\frac{x-1}{-10}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{-1}.$$

216. Sean dadas las ecuaciones canónicas de una recta. Designemos con la letra t cada una de las razones iguales que figuran en estas ecuaciones canónicas; se tiene

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t.$$

De aquí

$$\left.\begin{aligned}x=x_0+lt,\\y=y_0+mt,\\z=z_0+nt.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $M_0(x_0; y_0; z_0)$ en dirección del vector $\boldsymbol{a}=\{l; m; n\}$. En las ecuaciones (3), t se considera como un parámetro que varía arbitrariamente; x, y, z son funciones de t; al variar t, las cantidades x, y, z varían de tal modo, que el punto $M(x, y, z)$ se desplaza por la recta dada. Es conveniente aplicar las ecuaciones paramétricas

de la recta cuando se pide hallar el punto de intersección de la recta con un plano.

E j e m p l o. Dada la recta

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$$

y el plano $2x+y+z-6=0$, hallar su punto de intersección.

S o l u c i ó n. El problema se reduce a determinar x, y, z del sistema de las tres ecuaciones dadas (se tienen dos ecuaciones de la recta y una ecuación del plano). Los cálculos necesarios se simplifican, si aumentamos el número de incógnitas (y el número de ecuaciónes) hasta cuatro, haciendo $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}=t$; de aquí, que

$$x=2+t; \quad y=3+t, \quad z=4+2t.$$

Sustituyendo estas expresiones en el primer miembro de la ecuación del plano dado, obtenemos una ecuación con una incógnita:

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0.$$

Resolviendo esta ecuación, hallamos: $t=-1$, por consiguiente, las coordenadas del punto buscado son: $x=1$, $y=2$, $z=2$.

217. Supongamos que t denota los segundos que han pasado desde un instante convencional de tiempo («momento de poner en marcha el segundometro») y que las ecuaciones (3) son las e c u a c i o n e s d e l m o v i m i e n t o de un punto $M(x, y, z)$ (véase n° 45). Analicemos el carácter de este movimiento.

Ante todo, de lo expuesto anteriormente queda claro, que el movimiento del punto M es rectilíneo y, además, que se efectúa por una recta que pasa por el punto M_0 en dirección del vector $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$.

Es fácil comprender que el movimiento del punto M determinado por la ecuación (3) es u n i f o r m e. En efecto, según las ecuaciones (3), se tiene:

$$x-x_0=lt, \quad y-y_0=mt, \quad z-z_0=nt.$$

Las últimas tres ecuaciones son equivalentes a una ecuación vectorial:

$$\overline{M_0M}=\boldsymbol{a}t.$$

De aquí se ve que durante t segundos, el punto M recorre un camino $\overline{M_0M}$, igual al vector $\boldsymbol{a}$, alargado en «t veces». Por lo tanto, el camino recorrido por el punto M es proporcional al tiempo t, lo que significa que el movimiento del punto M es uniforme.

Calculemos, por último, la v e l o c i d a d del movimiento del punto M. Para esto, obsérvese que durante el primer segundo (desde $t=0$ hasta $t=1$), el punto M recorre el camino $\overline{M_0M}=\boldsymbol{a}$. Por consiguiente, la velocidad v del movimiento del punto M es en su valor absoluto igual al módulo del vector $\boldsymbol{a}$, es decir, $v=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$.

En conclusión, *las ecuaciones* (3) *determinan un movimiento rectilíneo y uniforme del punto* $M(x, y, z)$ *con velocidad* $v=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$ *en dirección del vector* $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$; el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ocupa la posición inicial del punto variable $M(x, y, z)$ (o sea, que cuando $t=0$, el punto M coincide con el punto M_0).

Ejemplo. Hallar las ecuaciones del movimiento rectilíneo de un punto $M(x, y, z)$ que, teniendo la posición inicial en el punto $M_0(1, 1, 1)$, se mueve uniformemente en línea recta en dirección del vector $S=\{2, 3, 6\}$ con la velocidad $v=21$.

Solución. Comparando el módulo del vector S, que es igual a $\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$, con la velocidad dada $v=21$, vemos que por vector $\boldsymbol{a}$ se puede tomar el vector S alargado en tres veces, es decir, $\boldsymbol{a}=\{6, 9, 18\}$. Las ecuaciones buscadas son

$$x=1+6t, \quad y=1+9t, \quad z=1+18t.$$

§ 68. Anotaciones complementarias y ejercicios

218. Frecuentemente, en geometría analítica se necesita hallar las ecuaciones de una recta conociendo dos de sus puntos. Vamos a resolver este problema de una forma general, suponiendo dados dos puntos arbitrarios:

$$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1) \quad \text{y} \quad M_2(x_2;\ y_2;\ z_2).$$

Para resolver este problema es suficiente tener en cuenta, que por vector director de la recta considerada se puede tomar el vector $\boldsymbol{a}=\overline{M_1M_2}$; de aquí que

$$l=x_2-x_1, \qquad m=y_2-y_1, \qquad n=z_2-z_1.$$

Atribuyendo al punto $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ el mismo papel que desempeña en el nº 215 el punto M_0, se tiene:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Estas son las ecuaciones (canónicas) *buscadas de la recta que pasa por dos puntos dados:* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *y* $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

219. Resolvamos también en forma general el problema siguiente: hallar la ecuación del plano que pasa por tres puntos distintos*): $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ y $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$.

Designemos con x, y, z las coordenadas de un punto arbitrario M del espacio y consideremos tres vectores: $\overline{M_1M}=\{x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1\}$, $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$ y $\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1\}$. El punto M está situado en el plano $M_1M_2M_3$, cuando, y sólo cuando, los vectores $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ y $\overline{M_1M_3}$ son coplanares;

---

*) Se supone que estos tres puntos no están situados en una recta. En caso contrario, el problema es indeterminado (*N. del T.*).

según el n° 185, la condición para que tres vectores sean coplanares, es que el determinante de tercer orden, formado por sus coordenadas, sea igual a cero. En este caso, se tiene:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esta es la *ecuación buscada del plano que pasa por los puntos* M_1, M_2, M_3, puesto que a ella satisfacen las coordenadas x, y, z del punto M, cuando, y sólo cuando, este punto está situado en el plano.

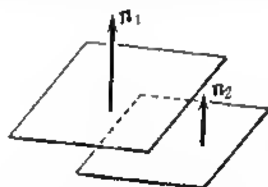


Fig. 106.

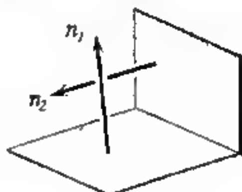


Fig. 107.

220. En una serie de problemas de geometría analítica se necesita saber las *condiciones de paralelismo y de perpendicularidad* de dos planos, de dos rectas y de una recta y un plano. Deduzcamos estas condiciones.

1) Sean dados dos planos

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Estos son paralelos cuando, y sólo cuando, sus vectores normales $\boldsymbol{n} = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\boldsymbol{n} = \{A_2, B_2, C_2\}$ son colineales (fig. 106; la coincidencia de los planos la consideramos en esta oportunidad como un caso particular de paralelismo). De aquí y por el n° 154, obtenemos *la condición de paralelismo de dos planos*:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Los planos dados son perpendiculares cuando, y sólo cuando, sus vectores normales son perpendiculares (fig. 107). De aquí y por el n° 165, obtenemos la *condición de perpendicularidad de dos planos*:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

2) Sean dadas dos rectas

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$
$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Estas son paralelas cuando, y sólo cuando, sus vectores directores $a_1=\{l_1, m_1, n_1\}$, $a_2=\{l_2, m_2, n_2\}$ son colineales (fig. 108;

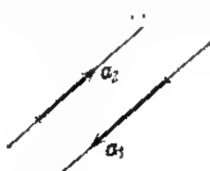


Fig. 108.

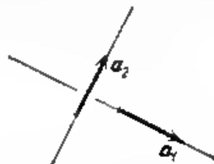


Fig. 109.

la coincidencia de las rectas se considera aquí como un caso particular de paralelismo). De aquí obtenemos la *condición de paralelismo de dos rectas*:

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{n_2}{n_1}.$$

Las rectas dadas son perpendiculares cuando, y sólo cuando, sus vectores directores son perpendiculares (fig. 109; las rectas

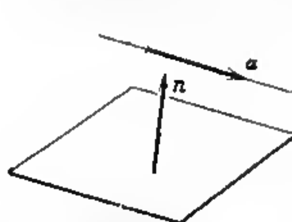


Fig. 110.

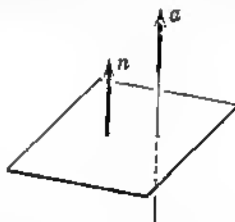


Fig. 111.

perpendiculares en el espacio pueden no cortarse). De aquí obtenemos la *condición de perpendicularidad de dos rectas:*

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

3) Sean dados una recta

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

y un plano

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

La recta es paralela al plano cuando, y sólo cuando, el vector director $\mathbf{a}=\{l, m, n\}$ de esta recta es perpendicular al vector normal $\mathbf{n}=\{A, B, C\}$ del plano (fig. 110; el caso en que la recta está situada en el plano se considera como un caso particular de paralelismo). *De aquí obtenemos la condición de paralelismo de una recta y un plano:*

$$Al+Bm+Cn=0.$$

La recta es perpendicular al plano cuando, y sólo cuando, el vector director de esta recta es colineal al vector normal del plano (fig. 111). *De aquí obtenemos la condición de perpendicularidad de una recta y un plano:*

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

A continuación se expone una serie de ejemplos con datos numéricos

221. Ejemplo 1. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta

$$\left.\begin{array}{r}3x+2y+5z+6=0,\\ x+4y+3z+4=0\end{array}\right\}$$

y es paralelo a la recta

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-3}.$$

Solución. Hallamos la ecuación del haz de planos (véanse los n°n° 212, 213) que pasan por la primera de las rectas dadas:

$$3x+2y+5z+6+\lambda(x+4y+3z+4)=0. \qquad (1)$$

Tenemos que elegir en este haz un plano que sea paralelo a la segunda de las rectas dadas; para eso hay que hallar el valor numérico apropiado de λ. Representemos la ecuación (1) en la forma

$$(3+\lambda)x+(2+4\lambda)y+(5+3\lambda)z+(6+4\lambda)=0. \qquad (2)$$

El plano buscado tiene que ser paralelo a la recta

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-3}.$$

Aplicando la condición de paralelismo de una recta y un plano, para la cantidad desconocida λ, obtenemos la ecuación

$$3(3+\lambda)+2(2+4\lambda)-3(5+3\lambda)=0.$$

De aquí, $\lambda=1$. Sustituyendo en la ecuación (2) el valor buscado de λ, hallamos: $4x+6y+8z+10=0$, o sea, $2x+3y+4z+5=0$.

Ejemplo 2. Dada la recta

$$\left.\begin{array}{r}3x-2y-z+4=0,\\ x-4y-3z-2=0,\end{array}\right\}$$

hallar su proyección sobre el plano $5x+2y+2z-7=0$.

S o l u c i ó n. Tenemos que hallar un plano que pase por la recta dada y sea perpendicular al plano dado; entonces, la proyección buscada se determina como la intersección de este plano con el plano dado. Escribamos la ecuación del haz de planos que pasan por la recta dada:

$$3x-2y-z+4+\lambda(x-4y-3z-2)=0. \qquad (3)$$

Esta ecuación determina el plano buscado para un valor determinado de λ; éste es el que tenemos que hallar. Representemos la ecuación (3) en la forma

$$(3+\lambda)x+(-2-4\lambda)y+(-1-3\lambda)z+(4-2\lambda)=0. \qquad (4)$$

El plano buscado tiene que ser perpendicular al dado. Utilizando la condición de perpendicularidad de dos planos, para la incógnita λ obtenemos la ecuación:

$$5(3+\lambda)+2(-2-4\lambda)+2(-1-3\lambda)=0.$$

De aquí, $\lambda=1$. Sustituyendo en la ecuación (4) el valor obtenido de λ, hallamos la ecuación del plano que pasa por la recta dada y es perpendicular al plano dado: $4x-6y-4z+2=0$, o sea, $2x-3y-2z+1=0$. La proyección de la recta dada sobre el plano dado se determina por las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}2x-3y-2z+1=0,\\5x+2y+2z-7=0.\end{aligned}\right\}$$

E j e m p l o 3. Calcular la distancia del punto $P(1;\ 1;\ 1)$ a la recta

$$\frac{x-11}{2}=\frac{y-18}{5}=\frac{z-4}{-2}.$$

S o l u c i ó n. Tracemos por P un plano α perpendicular a la recta dada y hallemos el punto Q, en el que este plano se corta con la recta. La distancia buscada del punto P a la recta, es igual a la distancia del punto P al punto Q

Según el nº 199, la ecuación del plano α se puede escribir en la forma

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0,$$

pero este plano tiene que ser perpendicular a la recta dada. Por la condición de perpendicularidad de una recta y un plano, se tiene:

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{5}=\frac{C}{-2};$$

tomando aquí, para mayor facilidad, el coeficiente de proporcionalidad igual a la unidad, hallamos que $A=2$, $B=5$, $C=-2$. O sea, que la ecuación del plano es: $2(x-1)+5(y-1)-2(z-1)=0$, es decir, $2x+5y-2z-5=0$. Seguidamente tenemos que hallar el punto Q en el que el plano se corta con la recta dada. Para esto hay que resolver simultáneamente la ecuación de la recta dada con la ecuación del plano hallado α. Procediendo tal y como fue mostrado en el nº 216 (véase el ejemplo al final de este nº), hallamos las coordenadas del punto Q: $x=5$, $y=3$, $z=10$. La distancia buscada d del punto P a la recta dada, que es igual a la distancia entre los puntos P y Q, se halla por la fórmula conocida

$$d=\sqrt{(5-1)^2+(3-1)^2+(10-1)^2}=\sqrt{101}\approx 10.$$

13.

SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN *)

§ 69. Elipsoide e hiperboloides

222. De acuerdo a lo expuesto en el nº 196, son superficies de segundo orden las que en coordenadas cartesianas se determinan por ecuaciones de segundo grado. En este capítulo vamos a considerar diversas clases de superficies de segundo orden. En primer lugar, estudiaremos el elipsoide y dos hiperboloides; estas superficies del espacio son análogas a las elipses e hipérbolas del plano.

223. Se llama *elipsoide* a la superficie que en un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares se determina por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1)$$

La ecuación (1) se llama *ecuación canónica del elipsoide.*

Vamos a tratar de averiguar la forma del elipsoide y a representarlo en el plano. Con este fin emplearemos el «método de secciones paralelas».

Consideremos las secciones de un elipsoide dado por planos paralelos al plano coordenado Oxy. Cada uno de tales planos se determina por una ecuación de la forma $z=h$, y la línea que resulta en la sección se determina por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2};\\ z=h.\end{array}\right\} \qquad (2)$$

De aquí que, 1) si $|h|<c$, el plano $z=h$ se corta con el elipsoide por una elipse de semiejes

$$a^*=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

$$b^*=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

*) Estas superficies también se llaman cuádricas (*N.* del *T.*)

que está situada simétricamente respecto a los planos Oxz y Oyz; 2) las cantidades a^* y b^* tienen valor máximo para $h=0$ (entonces $a^*=a$, $b^*=b$); mejor dicho, la elipse mayor se forma en la sección con el plano coordenado $z=0$; 3) al crecer $|h|$ las cantidades a^* y b^* disminuyen; 4) para $h=\pm c$ las cantidades a^* y b^* se anulan, es decir, la elipse formada por la sección del elipsoide (1) con el plano $z=c$ o con el plano $z=-c$, degenera en un punto; es decir, los planos $z=\pm c$ son tangentes al elipsoide; 5) para $|h|>c$ las ecuaciones (2) determinan una elipse imaginaria; esto significa que, para $|h|>c$, el plano $z=h$ no se corta con el elipsoide dado.

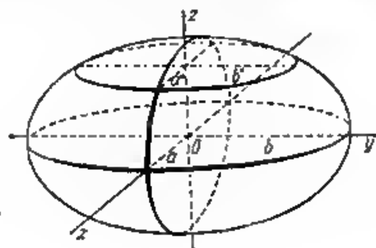


Fig. 112.

Un cuadro completamente análogo resulta al considerar las secciones de un elipsoide por planos paralelos a los planos coordenados Oxz y Oyz. Precisemos solamente, que el mismo plano Oxz corta al elipsoide por una elipse determinada por las ecuaciones $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ e $y=0$, y el plano Oyz, por una elipse determinada por las ecuaciones $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ y $x=0$ (véase la fig. 112 donde están representadas las secciones del elipsoide (1) con los planos Oxy, Oxz y $z=h$).

De todo lo expuesto llegamos a la conclusión de que el elipsoide es una superficie cerrada, ovalada, que posee tres planos de simetría perpendiculares entre sí. En el sistema de coordenadas elegido, estos planos coinciden con los planos coordenados.

224. Las cantidades a, b, c se llaman *semiejes* del elipsoide. Si todas ellas son distintas, el elipsoide se llama *escaleno*. Consideremos el caso en que dos de las cantidades a, b, c sean iguales. Supongamos, por ejemplo, que $a=b$. Entonces, las ecuaciones (2) determinan una circunferencia con centro en el eje Oz. De esto se deduce, que para $a=b$, el elipsoide se puede considerar como una superficie generada por la rotación de una elipse alrededor de uno de sus ejes. Si el elipsoide se ha formado por la rotación de una elipse alrededor de su eje mayor, éste se llama *elipsoide alargado de*

revolución; el elipsoide formado por la rotación de una elipse alrededor de su eje menor, se llama *elipsoide achatado de revolución*. Si $a=b=c$ el elipsoide es una esfera.

225. Consideremos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (3)$$

Su primer miembro contiene la misma expresión que figura en el primer miembro de la ecuación canónica del elipsoide. Como esta expresión es $\geqslant 0$ y el segundo miembro de la ecuación (3) es igual a -1, la ecuación (3) no determina ninguna figura real. En vista de la analogía con la ecuación (1), la ecuación (3) se llama ecuación del *elipsoide imaginario*.

226. Seguidamente vamos a ocuparnos de los hiperboloides. Existen dos hiperboloides: de una hoja y de dos hojas.

Se llama *hiperboloide de una hoja*, a la superficie que en un sistema cartesiano rectangular de coordenadas se determina por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (4)$$

Se llama *hiperboloide de dos hojas*, a la superficie determinada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (5)$$

Las ecuaciones (4) y (5) se llaman ecuaciones canónicas de los hiperboloides.

227. En este apartado estudiaremos el *hiperboloide de una hoja*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Consideremos sus secciones con los planos coordenados Oxz y Oyz. La sección con el plano Oxz se determina por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{aligned}\right\}$$

Se ve que ésta representa una hipérbola situada simétricamente respecto a los ejes coordenados Ox, Oz y que se corta con el eje Ox (en los puntos $(a;\ 0;\ 0)$ y $(-a;\ 0;\ 0)$). La sección con el plano Oyz se determina por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0.\end{aligned}\right\}$$

Estas representan una hipérbola simétrica respecto a los ejes Oy, Oz y que se corta con el eje Oy (en los puntos $(0;\ b;\ 0)$ y $(0;\ -b;\ 0)$).

Consideremos ahora las secciones del hiperboloide dado con los planos paralelos al plano coordenado Oxy. Cada uno de estos planos se determina por una ecuación de la forma $z=h$ y la sección del hiperboloide con este plano se determina por las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=1+\frac{h^2}{c^2}, \\ z&=h. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

De aquí se ve que: 1) cualquier plano $z=h$ se corta con el hiperboloide (4) formando una elipse de semiejes

$$a^*=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \quad b^*=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},$$

que resulta simétrica con respecto a los planos Oxz y Oyz; 2) las magnitudes a^* y b^* tienen valor mínimo para $h=0$ (entonces, $a^*=a$, $b^*=b$); o sea, en la sección con el plano coordenado $z=0$ se forma la elipse de menor tamaño (ésta se llama elipse de *garganta* del hiperboloide de una hoja); 3) al crecer indefinidamente $|h|$, las magnitudes a^* y b^* aumentan indefinidamente (fig. 113).

En resumen, el hiperboloide de una hoja tiene la forma de un tubo infinito que se extiende indefinidamente a ambos lados de la elipse de garganta. El hiperboloide de una hoja tiene tres planos de simetría perpendiculares entre sí; en el sistema coordenado elegido, estos planos coinciden con los planos coordenados.

228. Las cantidades a, b, c se llaman *semiejes* del hiperboloide de una hoja. Las primeras dos de ellas (a y b) están representadas en la fig. 113. Para representar el semieje c en la figura, habría que construir el rectángulo principal de alguna de las hipérbolas determinadas por las secciones del hiperboloide de una hoja con los planos Oxz y Oyz.

Obsérvese que, cuando $a=b$, las ecuaciones (6) determinan circunferencias con centro en el eje Oz. De esto se deduce que, para $a=b$, el hiperboloide de una hoja se puede considerar como una superficie generada por la rotación de una hipérbola alrededor de uno de sus ejes, justamente, del eje que no corta a la hipérbola.

229. Estudiemos a continuación el *hiperboloide de dos hojas*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Consideremos sus secciones con los planos coordenados Oxz y Oyz. La sección con el plano Oxz se determina por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}&=-1, \\ y&=0. \end{aligned}\right\}$$

Vemos que ésta representa una hipérbola simétrica respecto a los ejes coordenados Ox, Oz, que se corta con el eje Oz (en los puntos $(0;\ 0;\ c)$ y $(0;\ 0;\ -c)$). La sección con el plano Oyz se determina por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\\ x=0.\end{aligned}\right\}$$

Estas representan una hipérbola simétrica respecto a los ejes Oy, Oz, que se corta con el eje Oz (también en los puntos $(0;\ 0;\ c)$ y $(0;\ 0;\ -c)$).

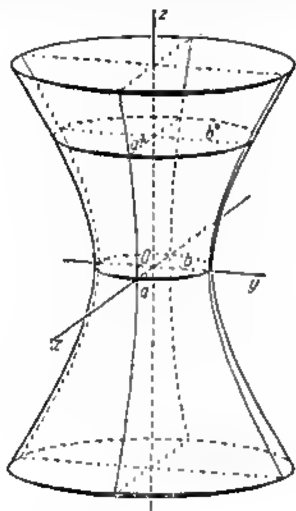


Fig. 113.

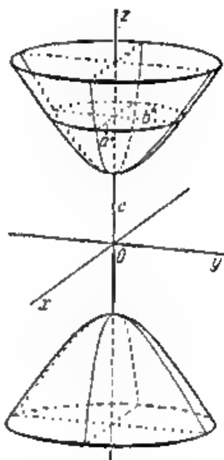


Fig. 114.

Consideremos ahora las secciones del hiperboloide dado obtenidas por planos paralelos al plano Oxy. Cada uno de estos planos se determina por una ecuación de la forma $z=h$, y la sección del hiperboloide con el mismo se determina por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

De aquí se ve que: 1) si $|h|>c$, el plano $z=h$ se corta con el

hiperboloide de dos hojas por una elipse de semiejes

$$a^* = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, \qquad b^* = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},$$

que es simétrica con respecto a los planos Oxz y Oyz; 2) al crecer $|h|$, las cantidades a^* y b^* aumentan; 3) si $|h|$ crece indefinidamente, a^* y b^* aumentan también indefinidamente; 4) si, disminuyendo, $|h|$ se aproxima a c, las cantidades a^* y b^* también disminuyen y se aproximan a cero; para $h=\pm c$, se tiene: $a^*=0$, $b^*=0$; esto significa que la elipse obtenida en la sección con el plano $z=c$ o con el plano $z=-c$, degenera en un punto, o sea, que los planos $z=\pm c$ son tangentes al hiperboloide; 5) si $|h|<c$, las ecuaciones (7) determinan una elipse imaginaria; esto significa que para $|h|<c$ el plano $z=h$ no se corta con el hiperboloide dado (fig. 114).

En resumen, el hiperboloide de dos hojas es una superficie compuesta por dos «hojas» separadas (de aquí el nombre de «dos hojas»); cada una de ellas tiene la forma de una copa convexa infinita. El hiperboloide de dos hojas tiene tres planos de simetría perpendiculares entre sí; en el sistema de coordenadas elegido, estos planos coinciden con los planos coordenados.

230. Las cantidades a, b, c se llaman *semiejes* del hiperboloide de dos hojas. En la fig. 114 está representada solamente la cantidad c. Para representar a y b en la figura habría que construir los rectángulos principales de las hipérbolas que resultan en las secciones del hiperboloide de dos hojas con los planos Oxz y Oyz.

Obsérvese que, cuando $a=b$, las ecuaciones (7) determinan circunferencias con el centro en el eje Oz. De aquí se deduce que, para $a=b$, el hiperboloide de dos hojas se puede considerar como una superficie formada por la rotación de una hipérbola alrededor de uno de sus ejes, precisamente, del eje que se corta con la hipérbola.

§ 70. Cono de segundo orden

231. Consideremos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (1)$$

Una particularidad de esta ecuación es su *homogeneidad*, es decir, que todos sus términos son de un mismo grado (=2). De aquí se deriva la siguiente particularidad geométrica de la superficie determinada por ella.

Si un punto M (distinto del origen de coordenadas) está situado en esta superficie, todos los puntos de la recta que pasan por el origen de coordenadas y por el punto M, también están situados en esta superficie.

Demostremos esta afirmación. Supongamos que las coordenadas del punto M son $(l;\ m;\ n)$ y que N es algún punto de la recta OM.

De acuerdo al nº 216, las coordenadas x, y, z del punto N se determinan por las igualdades

$$x = lt, \quad y = mt, \quad z = nt,$$

en donde t es cierto número. Supongamos que el punto M está situado en la superficie considerada; entonces,

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2} = 0.$$

Pero, en este caso,

$$\frac{(lt)^2}{a^2} + \frac{(mt)^2}{b^2} - \frac{(nt)^2}{c^2} = t^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2}\right) = 0,$$

y, por lo tanto, el punto N también está situado en esta superficie. La afirmación queda demostrada.

Advirtamos que esta misma propiedad la posee cada superficie que en coordenadas cartesianas se determina por una ecuación homogénea (puesto que en los razonamientos expuestos no se ha usado más que la homogeneidad de la ecuación dada). Mejor dicho, la superficie determinada por una ecuación **homogénea** está formada por rectas que pasan por un punto, precisamente por el origen de coordenadas. Tal superficie se llama *cónica*, o simplemente, *cono*. Las rectas que forman el cono se llaman *generatrices*, el punto, por el que pasan todas ellas, se llama *vértice* del cono.

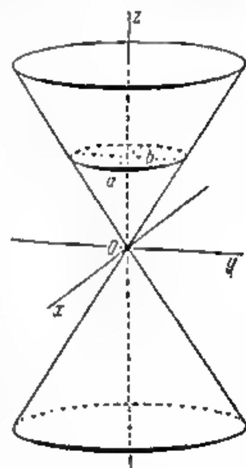


Fig. 115.

En particular, *la superficie que en un sistema de coordenadas cartesianas se determina por una ecuación de la forma* (1), *se llama cono de segundo orden*.

Para tener una idea de la forma del cono de segundo orden, es suficiente considerar su sección por algún plano que no pase por el origen de coordenadas (es decir, que no pase por el vértice). Tomemos, por ejemplo, el plano $z = c$. La sección del cono con este plano se determina por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Evidentemente, ésta representa una elipse de semiejes a y b, simétrica con respecto a los planos coordenados Oxz y Oyz.

De acuerdo a esto, se ha trazado la fig. 115, donde está representado el cono de segundo orden.

Obsérvese que, si $a=b$, la elipse determinada por las ecuaciones (2) es una circunferencia con centro en el eje Oz y, por consiguiente, el cono es *circular*.

232. Consideremos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{3}$$

Esta determina un punto real, único: $x=0$, $y=0$, $z=0$. Sin embargo, en vista de la analogia con la ecuación (1), se llama, frecuentemente, ecuación del *cono imaginario*.

§ 71. Paraboloides

233. Existen en el espacio dos superficies que son análogas a la parábola en el plano. Se llaman *paraboloides* (elíptico e hiperbólico).

234. Se llama *paraboloide elíptico* a la superficie que en un sistema cartesiano rectangular de coordenadas se determina por la ecuación

$$2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q} \tag{1}$$

(para valores positivos de p y q). La ecuación (1) se llama ecuación canónica del paraboloide elíptico. Estudiemos esta superficie por el método de las secciones.

Ante todo, consideremos las secciones con los planos coordenados Oxz y Oyz. Para $y=0$, de la ecuación (1), se tiene: $x^2=2pz$; así pues, la sección con el plano Oxz se determina por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^2&=2pz,\\ y&=0.\end{aligned}\right\}$$

Vemos que representa una parábola ascendente, simétrica con respecto al eje Oz y que tiene el vértice en el origen de coordenadas; el parámetro de esta parábola es igual a p. La sección con el plano Oyz se determina por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y^2&=2qz,\\ x&=0\end{aligned}\right\}$$

y representa una parábola de parámetro q situada de un modo análogo.

Consideremos ahora las secciones del paraboloide dado con planos paralelos al plano coordenado Oxy. Cada uno de tales planos se determina por una ecuación de la forma $z=h$, y la sección del paraboloide con este plano se determina por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}&=2h,\\ z&=h,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

De aquí se ve que: 1) si $h > 0$, el plano $z = h$ se corta con el paraboloide elíptico por una elipse de semiejes $a^* = \sqrt{2hp}$, $b^* = \sqrt{2hq}$, que es simétrica con respecto a los planos Oxz y Oyz; 2) al crecer h, las cantidades a^* y b^* aumentan; 3) si h crece indefinidamente, las cantidades a^* y b^* crecen también indefinidamente; 4) si, decreciendo, h se aproxima a cero, las cantidades a^* y b^* también disminuyen y se aproximan a cero; para $h = 0$, se tiene $a^* = 0$, $b^* = 0$; esto significa que la elipse formada en la sección del paraboloide (1) por el plano $z = 0$ degenera en un punto; mejor dicho,

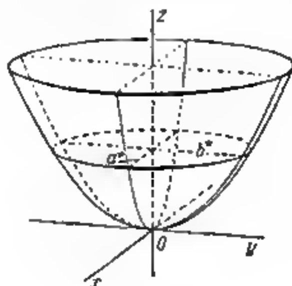


Fig. 116.

el plano $z = 0$ es tangente al paraboloide elíptico dado; 5) si $h < 0$, las ecuaciones (2) determinan una elipse imaginaria; esto significa que, para $h < 0$, el plano $z = h$ no se corta con el paraboloide dado (fig. 116).

De lo expuesto sacamos la conclusión de que el paraboloide elíptico tiene la forma de una copa convexa infinita. Tiene dos planos de simetría perpendiculares entre sí; en el sistema de coordenadas elegido, estos planos coinciden con los planos coordenados Oxz y Oyz. El punto que coincide con el origen de coordenadas se llama *vértice* del paraboloide elíptico; los números p y q se llaman *parámetros*.

Obsérvese que, cuando $p = q$, las ecuaciones (2) determinan una circunferencia con centro en el eje Oz. De aquí que, si $p = q$, el paraboloide elíptico se puede considerar como una superficie formada por la rotación de una parábola alrededor de su eje.

235. *La superficie que en un sistema de coordenadas cartesiano rectangular se determina por una ecuación de la forma*

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \tag{3}$$

(con valores positivos de p y q), se llama paraboloide hiperbólico. Ahora nos ocuparemos del estudio de esta superficie.

Consideremos la sección del paraboloide hiperbólico con el plano Oxz. Para $y=0$, de la ecuación (3), se tiene: $x^2=2pz$; o sea, la sección con el plano Oxz se determina por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^2&=2pz,\\ y&=0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Vemos que representa una parábola ascendente, simétrica con respecto al eje Oz, con vértice en el origen de coordenadas; el parámetro de esta parábola es igual a p.

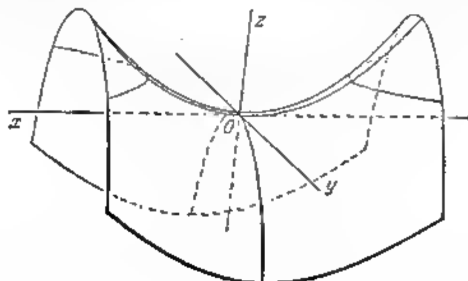


Fig. 117.

Vamos a considerar a continuación la sección del paraboloide dado con planos paralelos al plano Oyz. Cada uno de estos planos se determina por una ecuación de la forma $x=h$, y la sección del paraboloide con este plano, por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2z&=-\frac{y^2}{q}+\frac{h^2}{p},\\ x&=h. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

De aquí que para cualquier h, el plano $x=h$ se corta con el paraboloide hiperbólico por una parábola descendente, simétrica con respecto al plano Oxz (véase el n° 120). Como se ve en la primera de las ecuaciones (5), todas estas parábolas tienen un parámetro común, igual a q; el vértice de cada una de ellas está situado en la línea formada por la sección del paraboloide con el plano Oxz, es decir, en la parábola ascendente determinada por las ecuaciones (4) (fig. 117).

Obsérvese que cada plano $y=h$ corta al paraboloide hiperbólico por una parábola ascendente, como puede comprobarse de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2z&=\frac{x^2}{p}-\frac{h^2}{q},\\ y&=h, \end{aligned}\right\}$$

que determinan tales secciones; una de estas secciones, precisamen-

te, la que corresponde al valor de $h = 0$, la hemos estudiado en primer lugar.

En la fig. 117 está representado un trozo del paraboloide hiperbólico; el borde del trozo representado está formado por dos arcos de parábolas ascendentes, cuyos planos son paralelos al plano Oxz, y dos arcos de parábolas descendentes, cuyos planos son paralelos al plano Oyz.

Consideremos, por último, las secciones del paraboloide hiperbólico con planos paralelos al plano Oxy. La ecuación de cada uno de estos planos es $z = h$ y la sección del paraboloide con este plano se determina por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{aligned}\right\}$$

Vemos pues, que los planos $z = h$ se cortan con el paraboloide hiperbólico por hipérbolas simétricas con respecto a los planos Oxz y Oyz. Si $h > 0$, la hipérbola correspondiente se corta con el plano Oxz, si $h < 0$, la hipérbola se corta con el plano Oyz; para $h = 0$ la hipérbola degenera en un par de rectas (en la fig. 117 está representada una sección del paraboloide con el plano $z = h$ para el caso en que $h > 0$).

Lo expuesto nos permite sacar la conclusión de que el paraboloide hiperbólico tiene la forma de una silla de montar. Tiene dos planos de simetría perpendiculares entre si; en el sistema de coordenadas elegido, estos planos coinciden con los planos coordenados Oxz y Oyz. El punto de coincidencia con el origen de coordenadas se llama *vértice* del paraboloide hiperbólico; los valores p, q se llaman *parámetros*.

§ 72. Cilindros de segundo orden

236. Finalmente, vamos a estudiar una ecuación de segundo grado en la que no figura la coordenada variable z. Esta puede escribirse de la forma

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

De acuerdo al nº 193, la ecuación (1) determina una superficie c i l í n d r i c a (o como suele decirse, un cilindro), cuyas generatrices son paralelas al eje Oz. Como la ecuación (1) es de segundo grado, la superficie determinada por ella es un *cilindro de segundo orden*.

Hay que señalar que, en realidad, la ecuación (1) no se distingue en nada de la ecuación (1) § 41, que determina en e l p l a n o, en coordenadas cartesianas, una línea de segundo orden. De aquí que la sección del cilindro considerado por el plano Oxy es una línea de segundo orden. Según el carácter de esta línea, existen

los cilindros de segundo orden de los siguientes tipos:

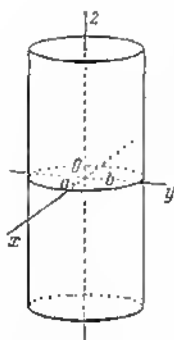


Fig. 118.

1) *Cilindro elíptico* (fig. 118). Mediante una elección adecuada del sistema de coordenadas, su ecuación se puede reducir a la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Si $a=b$, el cilindro es circular.

2) *Cilindro hiperbólico* (fig. 119). Su ecuación se puede reducir a la forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

3) *Cilindro parabólico* (fig. 120). Su ecuación se puede reducir a la forma

$$y^2=2px.$$

Puede ocurrir, además, que el primer miembro de la ecuación (1) sea un producto de dos factores de primer grado. Entonces, el cilindro «degenera» en un par de planos.

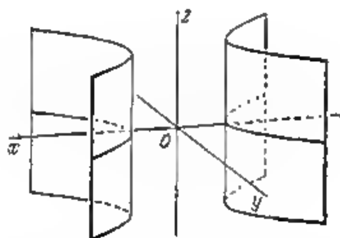


Fig. 119.

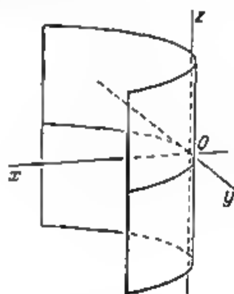


Fig. 120.

Por último, puede ocurrir que la ecuación (1) carezca de soluciones reales (por ejemplo, $x^2+y^2=-1$) y, por consiguiente, no determine ninguna figura geométrica. Se ha convenido en decir que tal ecuación «determina un cilindro imaginario».

§ 73. Generatrices rectilíneas del hiperboloide de una hoja. Construcción de V. Shujov

237. El estudio de los diversos tipos de superficies de segundo orden (véanse §§ 69—72) pone ya de manifiesto que entre ellas

hay superficies *regladas*, es decir, superficies formadas por rectas: conos, cilindros. Resulta que, además de los conos y los cilindros, son también superficies regladas de segundo orden el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico. Este hecho no se ve «a simple vista», sin embargo, se demuestra algebraicamente con facilidad. Hagamos la demostración para el hiperboloide de una hoja.

Representemos la ecuación canónica del hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

en la forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2},$$

o sea

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \tag{1}$$

Consideremos ahora dos ecuaciones de primer grado:

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

en donde α y β son ciertos números, no simultáneamente iguales a cero. Si se han fijado α y β, las ecuaciones (2) determinan simultáneamente una recta; variando α y β, obtenemos un sistema infinito de rectas. Advirtamos que, al multiplicar las ecuaciones (2) miembro a miembro, se obtiene la ecuación (1). De esto se deduce que cada una de estas rectas está situada por completo en el hiperboloide de una hoja. En efecto, si las coordenadas x, y, z de un punto satisfacen a las dos ecuaciones (2), éstas satisfacen también a la ecuación (1); así pues, cada punto de la recta determinada por las ecuaciones (2), para cualesquiera α y β (no simultáneamente iguales a cero), está situado en el hiperboloide considerado de una hoja, o sea, que en éste está situada la recta entera.

Demostremos, finalmente, que por cada punto del hiperboloide de una hoja pasa una y sólo una recta del sistema indicado. Sea $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ un punto arbitrario del hiperboloide de una hoja; como sus coordenadas satisfacen a la ecuación del hiperboloide, se tiene,

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right). \tag{3}$$

Vamos a buscar los números α, β de tal modo, que la recta correspondiente del sistema (2) pase por el punto M_0. Como las coordenadas del punto M_0 tienen que satisfacer a las ecuaciones de esta recta, para la determinación de α y β se tienen dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y_0}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y_0}{b}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Si $1+\frac{y_0}{b}\neq 0$, de la primera de las ecuaciones de este sistema hallamos que, $\beta=k\alpha$, en donde

$$k=\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}}{1+\frac{y_0}{b}}. \qquad (5)$$

Para $\beta=k\alpha$ queda también satisfecha la segunda ecuación del sistema (4); esto se deduce de las relaciones (3) y (5). Sustituyamos $\beta=k\alpha$ en las ecuaciones (2), suponiendo que α es arbitrario, pero diferente de cero. Como después de esta sustitución los dos miembros de ambas ecuaciones tienen un factor común α, éste se puede simplificar y obtenemos un par determinado de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ k\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b},\end{aligned}\right\}$$

que corresponde a una recta determinada; esta recta pasa por el punto M_0 (porque los números α y β se han elegido de acuerdo a las igualdades (4)).

Si $1+\frac{y_0}{b}=0$, la fórmula (5) carece de sentido; pero, si $1+\frac{y_0}{b}=0$, inevitablemente será $1-\frac{y_0}{b}\neq 0$. En este caso, la solución del sistema (4) se puede hallar partiendo de la segunda de sus ecuaciones y después, de un modo semejante a lo anterior, se puede demostrar que también en este caso por el punto M_0 pasa una recta única del sistema (2).

En conclusión, para diversos valores de α y β, las ecuaciones (2) determinan un sistema infinito de rectas que están situadas en el hiperboloide de una hoja y lo cubren por completo. Estas rectas se llaman *generatrices rectilíneas* del hiperboloide de una hoja.

Hemos demostrado que el hiperboloide de una hoja está formado por rectas, es decir, que es una superficie r e g l a d a. Pero, además; el hiperboloide de una hoja es una superficie dos veces reglada. Esto significa que tiene d o s s i s t e m a s de generatrices rectilíneas.

En efecto, análogamente a las ecuaciones (2) se pueden obtener las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Las ecuaciones (6) también determinan un sistema de generatrices rectilíneas del hiperboloide de una hoja y, además, diferentes del determinado por las ecuaciones (2).

En la fig. 121 está representado el hiperboloide de una hoja con sus dos sistemas de generatrices rectilíneas.

238. Sin entrar en detalles, indiquemos que el **paraboloide hiperbólico**

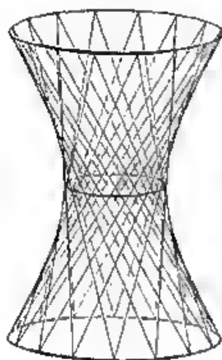


Fig. 121.

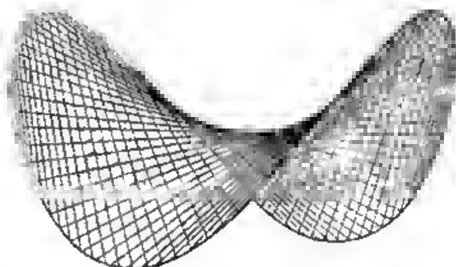


Fig. 122.

$$2z=\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}$$

también tiene **dos sistemas de generatrices rectilíneas**, una de los cuales se determina por las ecuaciones

$$\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta z,\qquad \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha,$$

y la otra, por las ecuaciones

$$\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta z,\qquad \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha.$$

En la fig. 122 está representado el paraboloide hiperbólico con sus dos sistemas de generatrices rectilíneas.

239. El conocido ingeniero ruso Vladimir Shujov tuvo la idea de emplear el carácter reglado del hiperboloide de una hoja en la técnica de las construcciones. Vladimir Shujov propuso una construcción de vigas metálicas situadas del mismo modo que las generatrices del hiperboloide (circular) de una hoja. Tales construcciones resultaron ser ligeras y de gran resistencia. Frecuentemente, se emplean en las instalaciones de depósitos de agua a presión y de altas antenas de radio.

Apéndice

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LOS DETERMINANTES

§ 1. Determinantes de segundo orden y sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1. Supongamos dada una tabla cuadrada de cuatro números a_1, a_2, b_1, b_2:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

La diferencia $a_1b_2 - a_2b_1$ *se llama determinante de segundo orden correspondiente a la tabla* (1). Este determinante se representa por la notación $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; de acuerdo a esto, se tiene:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \qquad (2)$$

Los números a_1, a_2, b_1, b_2 se llaman *elementos del determinante*. Se dice que los elementos a_1, b_2 están situados en la *diagonal principal* del determinante y los elementos a_2, b_1, en la *diagonal secundaria*. De este modo, el *determinante de segundo orden es igual a la diferencia entre los productos de los elementos situados en la diagonal principal y en la diagonal secundaria.*

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot 3 - (-4)\cdot 5 = 14.$$

2. Ahora explicaremos cómo se emplean los determinantes de segundo orden para la investigación y averiguación de las soluciones de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Consideremos un sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=h_1, \\ a_2x+b_2y=h_2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

con las incógnitas x, y (los coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2 y los términos independientes h_1, h_2 se suponen dados). Un par de números x_0, y_0 se llama *solución* del sistema (3), si éstos satisfacen al sistema (3), es decir, si al sustituir las letras x, y por los números correspondientes x_0, y_0, cada una de las ecuaciones (3) se convierte en una identidad aritmética.

Aquí buscaremos todas las soluciones del sistema (3) y, a la vez, haremos su análisis, o sea, aclararemos en qué casos el sistema (3) tiene solución única, en qué casos tiene más de una solución y en qué casos no tiene ninguna solución. Emplearemos el conocido método general de eliminación de las incógnitas: multipliquemos ambos miembros de la primera ecuación por b_2, ambos miembros de la segunda ecuación por $-b_1$ y, después, sumemos miembro a miembro las igualdades obtenidas; de este modo se elimina la incógnita y y se tiene:

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2h_1-b_1h_2. \tag{4}$$

Análogamente, eliminando en el sistema (3) la incógnita x, hallamos:

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1h_2-a_2h_1. \tag{5}$$

Hagamos las notaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}, \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Entonces, las ecuaciones (4) y (5) se pueden escribir así:

$$\Delta\cdot x=\Delta_x,\quad \Delta\cdot y=\Delta_y. \tag{7}$$

El determinante Δ formado por los coeficientes de las incógnitas del sistema (3) se llama *determinante de este sistema*. El determinante Δ_x se obtiene sustituyendo los elementos de la primera columna del determinante Δ por los términos independientes del sistema (3); el determinante Δ_y se obtiene del determinante Δ sustituyendo los elementos de la segunda columna del determinante por los términos independientes del sistema (3).

Supongamos que $\Delta \neq 0$. Entonces, de las ecuaciones (7), hallamos:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},$$

o de una forma desarrollada:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{8}$$

Evidentemente, estas fórmulas proporcionan la solución del sistema deducido (7). También proporcionan la solución del sistema original (3). Para persuadirnos de esto, es necesario sustituir las incógnitas x, y, en los primeros miembros de las ecuaciones (3) por las expresiones (8); después de esta sustitución (y como resultado de «evaluar» los determinantes Δ, Δ_x, Δ_y, y de unos cálculos elementales que el lector puede efectuar) se pone de manifiesto que el primer miembro de la primera de las ecuaciones (3), es igual al número h_1, el primer miembro de la segunda de las ecuaciones (3) es igual a h_2, lo que indica que las fórmulas (8) determinan la solución del sistema (3).

Sobre la base de lo expuesto, llegamos a la conclusión de que: *si el determinante Δ del sistema* (3) *es diferente de cero, el sistema tiene solución única: ésta se determina por las fórmulas* (8).

3. *Supongamos ahora que $\Delta=0$. En este caso, si al menos uno de los determinantes Δ_x, Δ_y es diferente de cero, el sistema* (3) *no tiene solución* (o como suele decirse, las ecuaciones de este sistema son *incompatibles*).

En efecto, si $\Delta=0$, pero, al menos uno de los determinantes Δ_x, Δ_y es diferente de cero, entonces, por lo menos una de las igualdades (7) será imposible, o sea, el sistema (7) no tendrá solución. Pero, entonces, el sistema (3) tampoco tendrá solución, puesto que el sistema (7) se ha deducido del sistema (3) y, por lo tanto, cada solución del sistema (3), si es que tal hubiese, sería solución del sistema (7).

Si $\Delta=0$, pero, a la vez, $\Delta_x=\Delta_y=0$, el sistema (3) *tiene una infinidad de soluciones* (en este caso, una de las ecuaciones del sistema es consecuencia de la otra).

En efecto, si $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, es decir, si

$$a_1b_2-a_2b_1=0, \; a_1h_2-a_2h_1=0, \; b_1h_2-b_2h_1=0,$$

los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes de las ecuaciones dadas son proporcionales. Esto significa que una de las ecuaciones del sistema se obtiene multiplicando todos los términos de la otra ecuación por un factor común, o sea, en el sistema sólo hay una ecuación esencial, por ejemplo, $a_1x+b_1y=h_1$,

la otra es consecuencia de ésta. Pero una ecuación de la forma $a_1x+b_1y=h_1$ siempre tiene una infinidad de soluciones, ya que a una de las incógnitas se le puede asignar un valor numérico arbitrario y la otra se puede hallar, respectivamente, de la ecuación (por ejemplo, si $b_1\neq 0$, asignando arbitrariamente valores a x, se puede determinar y por la fórmula:

$$y=\frac{-a_1x+h_1}{b_1}.$$

N o t a. En estos razonamientos se ha supuesto que cada ecuación del sistema tiene solución por separado. Si se consideran sistemas que contienen igualdades contradictorias, la proposición enunciada es errónea. Por ejemplo, el sistema

$$0\cdot x+0\cdot y=1,$$
$$0\cdot x+0\cdot y=1,$$

satisface a las condiciones: $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$; sin embargo, este sistema no tiene ninguna solución.

4. En resumen, *si el determinante del sistema* (3) *es diferente de cero* ($\Delta\neq 0$), *el sistema tiene solución única (que se determina por las fórmulas* (8)); *si* $\Delta=0$, *el sistema o no tiene solución o tiene una infinidad de ellas.*

E j e m p l o 1. Hallar todas las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{l}3x+4y=2,\\ 2x+3y=7.\end{array}\right\}$$

S o l u c i ó n. Calculemos el determinante del sistema:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-2\cdot 4=1.$$

Como $\Delta\neq 0$, el sistema tiene solución única, que se determina por las fórmulas (8). Busquemos Δ_x y Δ_y:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 7 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-4\cdot 7=-22,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 7\end{vmatrix}=3\cdot 7-2\cdot 2=17.$$

De aquí,

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-22}{1}=-22,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{17}{1}=17.$$

E j e m p l o 2. Hallar todas las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{l}3x+4y=1,\\ 6x+8y=3.\end{array}\right\}$$

S o l u c i ó n. Calculemos el determinante del sistema:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 6 & 8\end{vmatrix}=3\cdot 8-4\cdot 6=0.$$

Como $=0$, el sistema dado, o no tiene ninguna solución, o tiene una infinidad de ellas. Para determinar cuál de estos casos tienen lugar, hallamos

Δ_x y Δ_y:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3.$$

Como $\Delta = 0$, pero $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, el sistema dado no tiene solución.

Nota. A la misma conclusión se puede llegar inmediatamente si se multiplican todos los términos de la primera ecuación por 2 y se resta el resultado término a término de la segunda ecuación; se obtiene la igualdad $0 = 1$, que es contradictoria. Por consiguiente, las ecuaciones dadas son incompatibles.

Ejemplo 3. Hallar todas las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 1, \\ 6x + 8y &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Solución. Los coeficientes de x, y son los mismos que en el ejemplo 2; por eso, $\Delta = 0$. Por consiguiente, el sistema dado o no tiene ninguna solución, o tiene una infinidad de ellas. Pero, se observa, que la segunda ecuación del sistema es consecuencia de la primera (resulta de multiplicar todos los términos de la primera ecuación por 2). Por lo tanto, ya que el sistema se reduce a una ecuación, éste tiene infinitas de soluciones; éstas se obtienen dando a x valores numéricos arbitrarios y hallando los valores correspondientes de y por la fórmula

$$y = \frac{1 - 3x}{4}.$$

5. Consideremos, particularmente, un sistema de dos ecuaciones homogéneas con dos incógnitas

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0, \\ a_2x + b_2y &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

es decir, un sistema de ecuaciones, cuyos términos independientes son iguales a cero.

Es evidente que tal sistema siempre tiene *solución nula:* $x = 0$, $y = 0$. Si $\Delta \neq 0$, esta solución es única; si $\Delta = 0$, el sistema homogéneo, además de la solución nula, tiene una infinidad de soluciones (puesto que para el sistema homogéneo el caso de ausencia de soluciones está excluido). Estas conclusiones se pueden formular así: *un sistema homogéneo* (9) *tiene solución no nula cuando, y sólo cuando*, $\Delta = 0$.

§ 2. Sistema homogéneo de dos ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

6. Resolvamos el sistema de dos ecuaciones homogéneas

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

con tres incógnitas x, y, z. Supongamos que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2)$$

Escribamos el sistema (1) en la forma

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y&=-c_1z, \\ a_2x+b_2y&=-c_2z \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

y supongamos que a la incógnita z se le ha asignado algún valor numérico. Para un valor numérico determinado de z, el sistema (3) tiene solución única, que se puede obtener aplicando las fórmulas (8) § 1:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ y&=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Los números x, y, juntos con el número z, forman una solución del sistema dado (1); a diversos valores numéricos de z corresponden diferentes soluciones del sistema (1) (el sistema (1) tiene infinidad de soluciones, ya que z se puede elegir arbitrariamente).

Escribamos las fórmulas (4) de una forma más conveniente. Ante todo, hagamos notar que

$$\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}z, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}z;$$

basándose en estas igualdades, las fórmulas (4) se pueden escribir así:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

Hagamos las notaciones

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \tag{6}$$

ahora, de las fórmulas (5), se tiene:

$$x=\frac{\Delta_1\cdot z}{\Delta_3}, \ y=\frac{-\Delta_2\cdot z}{\Delta_3}. \tag{7}$$

Designemos $\frac{z}{\Delta_3}$ con la letra t. En este caso, $z=\Delta_3\cdot t$, y x e y, según las fórmulas (7), se expresarán por las igualdades: $x=\Delta_1\cdot t$, $y=-\Delta_2\cdot t$.

Obtenemos las *fórmulas*

$$x=\Delta_1\cdot t, \ y=-\Delta_2\cdot t, \ z=\Delta_3\cdot t, \tag{8}$$

las cuales determinan todas las soluciones del sistema (1) (cada solución por separado se obtiene para un valor numérico determinado de t).

Para los cálculos es conveniente tener en cuenta que los determinantes Δ_1, Δ_2, Δ_3 se obtienen suprimiendo alternativamente las columnas de la tabla

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

7. A la deducción anterior se llegó suponiendo que $\Delta_3 \neq 0$ (véase la desigualdad (2)).

En el caso en que $\Delta_3 = 0$, pero que sea diferente de cero al menos uno de los determinantes Δ_1, Δ_2, la deducción se reduce a lo anterior, alternando el papel de las incógnitas (si, por ejemplo, $\Delta_2 \neq 0$, se debe suponer que se asignan valores numéricos arbitrarios a la incógnita y y que x y z se determinan, respectivamente, de las ecuaciones del sistema). El resultado final es el mismo, es decir, todas las soluciones del sistema se determinan por las fórmulas (8).

Si los tres determinantes Δ_1, Δ_2, Δ_3 son iguales a cero, o sea, si

$$b_1c_2 - b_2c_1 = 0, \quad a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \quad a_1b_2 - b_1a_2 = 0,$$

los coeficientes de las ecuaciones del sistema (1) son proporcionales. En este caso, una de las ecuaciones del sistema es consecuencia de la otra: una de las ecuaciones se obtiene multiplicando todos los términos de la otra por un factor numérico. Así pues, para $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, el sistema, en realidad, se reduce a una ecuación. Es natural que tal sistema tiene una infinidad de soluciones; para obtener una de ellas hay que asignar *a dos de las incógnitas* valores numéricos arbitrarios y la tercera hay que hallarla de la ecuación.

Ejemplo 1. Hallar todas las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x + 5y + 8z &= 0, \\ 7x + 2y + 4z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Solución. Según el nº 6, se tiene:

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = -44, \quad \Delta_3 = -29.$$

Todas las soluciones del sistema dado se determinan por las fórmulas

$$x = 4t, \quad y = 44t, \quad z = -29t,$$

en donde t puede tomar valores arbitrarios.

Ejemplo 2. Hallar todas las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - 3z &= 0, \\ 6x + 4y - 6z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Solución. Se tiene, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$; el sistema contiene solamente una ecuación esencial (la segunda ecuación se obtiene multiplicando la primera por 2). Cualquier solución del sistema se compone de tres números x, y, z, en donde x, y son arbitrarios y $z = \dfrac{3x + 2y}{3}$.

§ 3. Determinantes de tercer orden

8. Sea dada una tabla cuadrada de nueve números a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Se llama determinante de tercer orden, correspondiente a la tabla (1), *al número designado con la notación:*

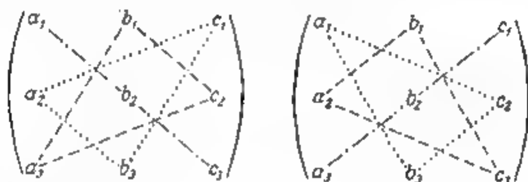
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

y que se determina por la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \qquad (2)$$

Los números a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 se llaman *elementos del determinante*. Los elementos a_1, b_2, c_3 están situados en la diagonal del determinante llamada *principal*; los elementos a_3, b_2, c_1 forman su diagonal secundaria.

Hay que tener presente que los primeros tres sumandos del segundo miembro de la igualdad (2) representan productos de elementos del determinante, tomados tres a tres, así como se señala con diversos trazos de puntos en el esquema de la izquierda que presentamos a continuación:



Para obtener los otros tres términos del segundo miembro de la igualdad (2) es necesario multiplicar los elementos del determinante, tres a tres, así como se señala con diversos trazos de puntos en el esquema de la derecha, cambiando luego de signo a cada uno de los productos obtenidos

La regla indicada, llamada regla de los triángulos, permite escribir la fórmula (2) sin hacer un gran esfuerzo mental para ser

recordada y calcular el determinante de tercer orden con elementos numéricos dados (sin tener que escribir previamente la fórmula (2)).

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 3\cdot 2+(-2)\cdot 0\cdot 1 - \\ -2\cdot 1\cdot 1-3\cdot 0\cdot 3-(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-12.$$

9. Los determinantes son de gran uso en las matemáticas, así como en sus aplicaciones. Más adelante veremos la aplicación de los determinantes de tercer orden para la investigación y resolución de sistemas de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. Pero antes tenemos que dar a conocer algunas propiedades de los determinantes. En el siguiente nº se señala una serie de propiedades importantes de los determinantes; todas las aclaraciones relativas a estas propiedades se harán para los determinantes de tercer orden; sin embargo, éstas son inherentes a los determinantes de cualquier orden (al final de este apéndice se expone el concepto de determinante de orden mayor que el de tercero).

10. Propiedad 1. *El valor de un determinante no varía, si sus filas se cambian por sus columnas, cambiando cada fila por la columna del mismo orden, o sea*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Esta propiedad se puede expresar también así: *si se cambian de lugar los elementos del determinante situados simétricamente con respecto a la diagonal principal, el valor del determinante no se altera.*

Para la demostración de esta propiedad, es suficiente aplicar la regla de los triángulos a los dos miembros de la igualdad (3) y comparar los resultados obtenidos.

Nota. La propiedad 1 significa que las filas y columnas del determinante son equivalentes; por eso, las propiedades ulteriores del determinante inherentes a sus columnas y sus filas será suficiente demostrarlas solamente para sus columnas o solamente para sus filas.

Propiedad 2. *La permutación de dos columnas o de dos filas de un determinante es equivalente a la multiplicación del determinante por —1.*

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Para la demostración de la igualdad (4) es suficiente aplicar la regla de los triángulos a los dos miembros de ella y comparar luego los resultados obtenidos (asimismo se establecen las igualdades análogas correspondientes a la permutación de otras filas del determinante).

Propiedad 3. *Si un determinante tiene dos columnas iguales o dos filas iguales, éste es igual a cero.*

En efecto, sea Δ un determinante que tiene dos columnas iguales. Si permutamos estas columnas, por una parte, de acuerdo a la propiedad 3, el determinante cambia de signo. Pero, por otra parte, como las columnas permutadas son iguales, su permutación no puede alterar el determinante. Por consiguiente, $\Delta = -\Delta$, o sea, $2\Delta = 0$, de donde $\Delta = 0$.

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 17 \\ 5 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Propiedad 4. *La multiplicación de todos los elementos de una columna o de una fila de un determinante por un número cualquiera k es equivalente a la multiplicación del determinante por este número k.*

Esta propiedad se puede enunciar también así: *el factor común de todos los elementos de una columna o de una fila de un determinante se puede sacar fuera del signo del mismo.*

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Para demostrar esta propiedad es suficiente observar que el determinante se expresa en forma de una suma, cada término de la cual contiene como factor un elemento de cada fila y un elemento de cada columna (véase la fórmula (2) nº 8).

Propiedad 5. *Si todos los elementos de una columna o de una fila son iguales a cero, el determinante es igual a cero.*

Esta propiedad es un caso particular de la anterior (para $k=0$).

Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Propiedad 6. *Si los elementos correspondientes de dos columnas o de dos filas de un determinante son proporcionales, el determinante es igual a cero.*

Esta propiedad se deduce de las propiedades 4 y 3. En efecto, si los elementos de dos columnas de un determinante son proporcionales, los elementos de una de ellas se obtienen multiplicando los elementos de la otra por cierto factor común. Sacando este factor fuera del determinante, se obtiene un determinante con dos columnas iguales; de acuerdo a la propiedad 3, éste es igual a cero.

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 10 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

Propiedad 7. *Si cada elemento de la n-ésima columna (o de la n-ésima fila) de un determinante representa una suma de dos sumandos, el determinante se puede representar en forma de una suma de dos determinantes, uno de los cuales tiene en la n-ésima columna (o en la n-ésima fila) los primeros sumandos indicados y, el otro, los segundos sumandos; los elementos situados en los otros lugares son los mismos para los tres determinantes.*

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2' + a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3' + a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Para demostrar esta igualdad es suficiente aplicar la regla de los triángulos a los determinantes escritos en ambos miembros de la misma y comparar los resultados obtenidos.

Propiedad 8. *Si a los elementos de una columna (o de una fila) se les agrega los elementos correspondientes de otra columna (o de otra fila), multiplicados por cualquier factor común, el valor del determinante no se altera.*

La propiedad 8 se deduce de las propiedades 7 y 6; aclaremos esto con un ejemplo. Supongamos que a los elementos de la primera columna se les ha agregado los elementos de la segunda columna multiplicados por cierto número k. Entonces, de acuerdo a la propiedad 7 se tiene:

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

El segundo de los determinantes obtenidos tiene dos columnas proporcionales. Por consiguiente, por la propiedad 6, es igual a cero; resulta la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

que en este caso expresa la propiedad indicada del determinante.

Las propiedades ulteriores de los determinantes están relacionadas con los conceptos de complemento algebraico y de menor.

§ 4. Complementos algebraicos y menores

11. Consideremos el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Por la definición (véase nº 8)

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \qquad (2)$$

Agrupemos aquí todos los términos que contienen uno de los elementos del determinante y saquemos este elemento fuera del paréntesis; la cantidad que queda encerrada entre paréntesis se llama *complemento algebraico* de este elemento. El complemento algebraico de un elemento se designará con una letra mayúscula de la misma denominación y del mismo índice que la letra con la que se designa el mismo elemento. Por ejemplo, el complemento algebraico del elemento a_1 se designará mediante A_1, el de b_1, mediante B_1, etc., etc.

Propiedad 9. *El valor de un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una columna (o de una fila) por sus complementos algebraicos.*

Mejor dicho, se verifican las igualdades siguientes:

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \quad \Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \qquad (3)$$

$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, \quad \Delta = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, \qquad (4)$$

$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3, \quad \Delta = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3. \qquad (5)$$

Para demostrar, por ejemplo, la primera de estas igualdades, es suficiente escribir el segundo miembro de la fórmula (2) en la forma

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1);$$

las cantidades que figuran entre paréntesis son los complementos algebraicos de los elementos a_1, a_2, a_3, etc., etc., es decir,

$$b_2c_3 - b_3c_2 = A_1; \; b_3c_1 - b_1c_3 = A_2; \; b_1c_2 - b_2c_1 = A_3.$$

De aquí y de lo anterior obtenemos:

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3,$$

que es lo que se quería demostrar. Las otras igualdades (3—5) se demuestran análogamente. La expresión del determinante mediante

alguna de las fórmulas (3—5) se llama desarrollo del determinante por los elementos de una columna o de una fila (la primera fórmula proporciona el desarrollo por los elementos de la primera columna, etc., etc.).

12. Se llama *menor* de un elemento de un determinante, al que se obtiene suprimiendo la fila y la columna del determinante dado, en la intersección de las cuales está situado este elemento. Por ejemplo, el menor del elemento a_1 del determinante Δ es el determinante $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, el menor del elemento b_1 es el determinante $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, etc., etc.

Resulta, *que el complemento algebraico de cualquier elemento de un determinante es igual al menor de este elemento, tomado con signo más, si la suma de los números que indican el orden de la fila y de la columna, en cuyas intersecciones está situado el elemento considerado, es par, y con signo contrario, si esta suma es impar*. Para comprobar esto, el lector ha de considerar los complementos algebraicos de todos los elementos del determinante y compararlos con sus menores.

Esta circunstancia facilita substancialmente el uso de las fórmulas (3—5), puesto que da la posibilidad de escribir los complementos algebraicos de los elementos del determinante inmediatamente, «observándo» simplemente este determinante. Es conveniente tener presente también el esquema siguiente:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix},$$

donde están señalados con signo más los lugares de los elementos, cuyos complementos algebraicos son iguales a los menores, tomados con sus propios signos.

Ejemplo. Calcular el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix},$$

desarrollándole por los elementos de su primera fila.

Solución.

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 12 & 19 \\ 9 & 17 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 8.$$

Nota. El cálculo del determinante mediante su desarrollo por los elementos de una columna o de una fila, se puede simplificar, transformándolo previamente de acuerdo a la propiedad 8. A saber, multiplicando los elementos de una columna (o de una fila) por un factor cualquiera y agregándolos después a los elementos de otra columna (o de otra fila), se obtiene un determinante nuevo que es igual al dado; eligiendo adecuadamente el factor, se puede conseguir que uno

de los elementos del determinante obtenido sea igual a cero. Repitiendo una vez más esta operación, se obtiene un determinante igual al dado, en el cual dos elementos de una columna (o de una fila) son iguales a cero. Calculando el determinante obtenido mediante su desarrollo por los elementos de la columna indicada (o de la fila), resulta solamente un menor, puesto que los otros dos menores se multiplican por elementos iguales a cero. Así, por ejemplo, calculando el determinante Δ propuesto en el ejemplo anterior, hacemos las transformaciones previas: a los elementos de la segunda columna agregamos los elementos de la primera columna multiplicados por (-2), después, a los elementos de la tercera columna agregamos los elementos de la primera columna multiplicados por (-3); resulta:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 5 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 8\end{vmatrix}.$$

Desarrollando este determinante por los elementos de la primera fila, obtenemos:

$$\Delta=2\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 8\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}5 & 4\\ 3 & 8\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=8.$$

13. A continuación se dan algunas recomendaciones importantes para la discusión y resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas *).

Dado el determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}, \qquad (1)$$

escribamos su desarrollo por los elementos de una fila o de una columna, por ejemplo, por los elementos de la primera columna:

$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3. \qquad (6)$$

Sustituyamos en el segundo miembro de esta igualdad los números a_1, a_2, a_3 por números cualesquiera h_1, h_2, h_3; entonces, el segundo miembro de la igualdad (6) representará el desarrollo por los elementos de la primera columna de un determinante, que se obtiene del determinante Δ, sustituyendo los elementos de su primera columna por los números h_1, h_2, h_3:

$$h_1A_1+h_2A_2+h_3A_3=\begin{vmatrix}h_1 & b_1 & c_1\\ h_2 & b_2 & c_2\\ h_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Tomemos ahora en lugar de h_1, h_2, h_3 los elementos de la segunda o tercera columna del determinante dado (o sea, tomemos

*) Las proposiciones análogas relativas a los determinantes de orden superior se emplean en la discusión y resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado con cualquier número de incógnitas.

$h_1=b_1,\ h_2=b_2,\ h_3=b_3$ o $h_1=c_1,\ h_2=c_2,\ h_3=c_3$). En este caso, el determinante (7) tendrá dos columnas iguales y, por consiguiente, será igual a cero; resulta la igualdad

$$b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0, \tag{8}$$

o

$$c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0. \tag{9}$$

Si partimos del desarrollo del determinante Δ por los elementos de su segunda columna, de un modo análogo se obtienen las igualdades:

$$a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3=0, \tag{10}$$
$$c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3=0. \tag{11}$$

Partiendo del desarrollo del determinante Δ por los elementos de su tercera columna, se obtienen las igualdades:

$$a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3=0, \tag{12}$$
$$b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3=0. \tag{13}$$

Además, se verifican seis igualdades semejantes para las filas del determinante.

Basándose en lo expuesto, podemos formular la siguiente propiedad de los determinantes:

Propiedad 10. *La suma de los productos de los elementos de cualquier columna (o de cualquier fila) de un determinante por los complementos algebraicos de los elementos correspondientes de otra columna (o de otra fila), es igual a cero.*

§ 5. Discusión y resolución de un sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

14. Consideremos un sistema de tres ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=h_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=h_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z&=h_3 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

con tres incógnitas $x,\ y,\ z$ (se suponen dados los coeficientes $a_1, b_1, \ldots, c_3$ y los términos independientes $h_1,\ h_2,\ h_3$).

Una terna de números $x_0,\ y_0,\ z_0$ se llama *solución* del sistema (1), si estos números satisfacen a las ecuaciones del sistema (1), es decir, si al sustituir las letras $x,\ y,\ z$ por los números $x_0,\ y_0,\ z_0$, cada una de las ecuaciones (1) se convierte en una identidad aritmética. Dediquémonos a averiguar todas las soluciones del sistema (1); a la vez, haremos la discusión, o sea, aclararemos en qué casos el sistema (1) tiene sólo una solución, en qué casos tiene más de una y en qué casos no tiene solución alguna.

En los razonamientos ulteriores va a desempeñar un papel principal el determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

formado por los coeficientes de las incógnitas; éste se llama *determinante del sistema dado.*

Igual que antes, se designarán con A_1, A_2, ... los complementos algebraicos de los elementos a_1, a_2, ... del determinante Δ. Multipliquemos los dos miembros de la primera ecuación del sistema (1) por A_1, los de la segunda, por A_2, los de la tercera, por A_3, y sumemos miembro a miembro estas ecuaciones; se tiene:

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)\,x+(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)\,y+$$
$$+(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)\,z=(h_1A_1+h_2A_2+h_3A_3).$$

De aquí y en virtud de las propiedades 9 y 10, se tiene (véase la primera de las igualdades (3) n° 11 y también las igualdades (8) y (9) n° 13):

$$\Delta\cdot x=h_1A_1+h_2A_2+h_3A_3. \tag{3}$$

Análogamente, hallamos:

$$\Delta\cdot y=h_1B_1+h_2B_2+h_3B_3, \tag{4}$$
$$\Delta\cdot z=h_1C_1+h_2C_2+h_3C_3. \tag{5}$$

Representemos por las notaciones Δ_x, Δ_y, Δ_z, los segundos miembros de las ecuaciones (3), (4) y (5), respectivamente. Entonces, las ecuaciones (3), (4) y (5) toman la forma

$$\Delta\cdot x=\Delta_x,\quad \Delta\cdot y=\Delta_y,\quad \Delta\cdot z=\Delta_z, \tag{6}$$

y, como se deduce del n° 13 (véase, por ejemplo, la fórmula (7) n° 13):

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Conviene tener en cuenta, que los determinantes Δ_x, Δ_y, Δ_z se obtienen del determinante Δ mediante una sustitución respectiva de su primera, segunda y tercera columna por una columna de los términos independientes del sistema dado.

Supongamos que $\Delta\neq 0$; en estas condiciones, de las ecuaciones (6), hallamos:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{8}$$

Evidentemente, estas fórmulas proporcionan la solución del sistema formado por las ecuaciones (6). Ellas proporcionan tam-

bién la solución del sistema inicial (*1*). Para demostrarlo hay que sustituir x, y, z en las ecuaciones del sistema por sus expresiones (8), y cerciorarse de que se satisface cada una de las ecuaciones (1). Hagamos esta sustitución para la primera ecuación; se tiene:

$$a_1 \frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1 \frac{\Delta_y}{\Delta} + c_1 \frac{\Delta_z}{\Delta} =$$
$$= \frac{1}{\Delta} a_1 (h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3) + \frac{1}{\Delta} b_1 (h_1 B_1 + h_2 B_2 + h_3 B_3) +$$
$$+ \frac{1}{\Delta} c_1 (h_1 C_1 + h_2 C_2 + h_3 C_3) = \frac{1}{\Delta} h_1 (a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1) +$$
$$+ \frac{1}{\Delta} h_2 (a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2) + \frac{1}{\Delta} h_3 (a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3).$$

Pero, en virtud de la novena propiedad de los determinantes,

$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 = \Delta,$$

y en virtud de la décima,

$$a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 = 0,$$
$$a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3 = 0.$$

Por lo tanto,

$$a_1 \frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1 \frac{\Delta_y}{\Delta} + c_1 \frac{\Delta_z}{\Delta} = h_1,$$

o sea, que los números x, y, z, determinados por las fórmulas (8), satisfacen a la primera ecuación del sistema dado; de modo análogo se demuestra que también satisfacen a las otras dos ecuaciones.

Todo lo expuesto nos da la posibilidad de hacer la siguiente conclusión: *si* $\Delta \neq 0$, *el sistema* (1) *tiene solución única; ésta se determina por las fórmulas* (8).

Ejemplo. Dado el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 4, \\ 3x - 5y + 3z &= 1, \\ 2x + 7y - z &= 8, \end{aligned}\right\}$$

hallar todas sus soluciones.

Solución. Calculemos el determinante del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33.$$

Como $\Delta \neq 0$, el sistema dado tiene solución única, que se determina mediante las fórmulas (8). De acuerdo a las fórmulas (7), se tiene:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33.$$

Por consiguiente, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

15. Supongamos ahora que el determinante del sistema (1) es igual a cero: $\Delta = 0$.

Si, siendo $\Delta = 0$, *por lo menos uno de los determinantes* Δ_x, Δ_y, Δ_z *es diferente de cero, el sistema* (1) *no tiene solución alguna* (como suele decirse, las ecuaciones de este sistema son i n c o m p a t i b l e s).

En efecto, si $\Delta = 0$, pero al menos uno de los determinantes Δ_x, Δ_y, Δ_z es diferente de cero, por lo menos una de las igualdades (6) será imposible, o sea, el sistema (6) no tendrá soluciones.

Pero, en este caso, tampoco tendrá soluciones el sistema (1), puesto que el sistema (6) ha sido deducido del sistema (1) y, por consiguiente, cada solución del sistema (1), si es que tal solución existiera, sería solución del sistema (6). Por ejemplo, el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ 3x + 2y + 2z &= 1, \\ 4x + 3y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

no tiene soluciones, puesto que $\Delta = 0$, y $\Delta_y = 1 \neq 0$. Podemos convencernos directamente de que las ecuaciones dadas son incompatibles; para esto sumamos miembro a miembro las dos primeras de ellas y restamos el resultado obtenido de la tercera; se tiene, $0 = 1$, que es una igualdad imposible.

Queda por considerar el caso en que $\Delta = 0$ y también $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$. Pero este caso lo estudiaremos más adelante, después de que veamos los llamados sistemas homogéneos.

16. Se llama sistema *homogéneo* de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas al sistema de la forma

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

es decir, al sistema de ecuaciones, cuyos términos independientes son iguales a cero. Evidentemente, tal sistema siempre tiene solu-

ción: $x=0$, $y=0$, $z=0$; ésta se llama solución *nula*. Si $\Delta \neq 0$, esta solución es única.

Vamos a demostrar que, *si* $\Delta=0$, *el sistema homogéneo* (9) *tiene una infinidad de soluciones no nulas*. (En este caso, o una de las ecuaciones es consecuencia de las otras dos, o dos de las ecuaciones son consecuencia de la tercera.)

En primer lugar, daremos la demostración, suponiendo que por lo menos uno de los menores del determinante Δ es diferente de cero; sea, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

En estas condiciones, las dos primeras ecuaciones del sistema (9) tienen una infinidad de soluciones simultáneas no nulas, determinadas por las fórmulas

$$x=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \quad y=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \quad z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t \qquad (10)$$

para valores cualesquiera de t (véase nº 6, fórmulas (8)). Fácilmente se ve que cuando $\Delta=0$, todos estos números satisfacen también a la tercera ecuación del sistema (9). En efecto, sustituyéndolos en lugar de las incógnitas en el primer miembro de la tercera ecuación del sistema (9), hallamos:

$$a_3x+b_3y+c_3z=\left(a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)t=\Delta\cdot t.$$

El resultado de la sustitución da cero, puesto que por la suposición, $\Delta=0$. Así pues, las fórmulas (10) determinan una solución del sistema (9) para cualquier t; si $t \neq 0$, esta solución no es nula. En el caso considerado, el sistema tiene sólo dos ecuaciones esenciales (la tercera ecuación es consecuencia de las otras dos).

Supongamos ahora que todos los menores del determinante Δ son iguales a cero; entonces, cualquier par de ecuaciones (9) tiene coeficientes proporcionales y, por consiguiente, de cualquier forma que elijamos dos ecuaciones en el sistema (9), una de ellas se obtiene multiplicando todos los términos de la otra por un factor común (en relación a esto véase el nº 7). Esto significa que en el sistema (9) sólo hay una ecuación esencial (las otras dos son consecuencia de ella). Evidentemente, tal sistema tiene una infinidad de soluciones no nulas (puesto que a dos incógnitas se les puede atribuir cualquier valor numérico y la tercera se halla de la única ecuación esencial del sistema). Por lo tanto, queda demostrada la proposición expuesta. El resultado obtenido se puede formular del modo siguiente:

El sistema homogéneo (9) *tiene soluciones no nulas cuando, y sólo cuando*, $\Delta=0$.

Ejemplo 1. El sistema

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z&=0,\\ 3x-5y+3z&=0,\\ 2x+7y-z&=0 \end{aligned}\right\}$$

solamente tiene solución nula, puesto que

$$\Delta=33\neq 0.$$

Ejemplo 2. El sistema

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ 2x+3y+2z&=0,\\ 4x+5y+4z&=0 \end{aligned}\right\}$$

tiene una infinidad de soluciones no nulas, puesto que

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Todas las soluciones se determinan por las fórmulas (10), según las cuales

$$x=-t,\ y=0,\ z=t$$

para cualquier t.

Ejemplo 3. El sistema

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ 2x+2y+2z&=0,\\ 3x+3y+3z&=0 \end{aligned}\right\}$$

también tiene una infinidad de soluciones no nulas, puesto que $\Delta=0$. En este caso, todos los menores del determinante Δ son iguales a cero y el sistema se reduce a una ecuación: $x+y+z=0$. Cada solución del sistema se compone de tres números: x, y, z, en donde x, y son arbitrarios y $z=-x-y$.

17. Volvamos a examinar un sistema no homogéneo arbitrario

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=h_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=h_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z&=h_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Vamos a demostrar que, *si $\Delta=0$ y el sistema (1) tiene alguna solución, entonces tiene una infinidad de soluciones diversas.*

Supongamos que los números x_0, y_0, z_0 forman una solución del sistema (1); sustituyendo en la ecuación (1) las incógnitas por x_0, y_0, z_0 se obtienen las identidades aritméticas:

$$\left.\begin{aligned} a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0&=h_1,\\ a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0&=h_2,\\ a_3x_0+b_3y_0+c_3z_0&=h_3. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Restando miembro a miembro las identidades (11) de las ecuaciones correspondientes (1) (la primera identidad (11) se resta de la

primera ecuación del sistema (1), la segunda identidad, de la segunda ecuación y la tercera identidad, de la tercera ecuación), se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)+c_1(z-z_0)=0, \\ a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)+c_2(z-z_0)=0, \\ a_3(x-x_0)+b_3(y-y_0)+c_3(z-z_0)=0. \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Hagamos las notaciones:

$$x-x_0=u, \quad y-y_0=v, \quad z-z_0=w. \qquad (13)$$

Ahora las igualdades (12) se escribirán así:

$$\left.\begin{array}{l} a_1u+b_1v+c_1w=0, \\ a_2u+b_2v+c_2w=0, \\ a_3u+b_3v+c_3w=0. \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Este es un sistema homogéneo de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas u, v, w y con los mismos coeficientes que el sistema dado (1). Se llama *sistema homogéneo correspondiente al sistema no homogéneo dado* (1).

Como, por las condiciones, $\Delta=0$, en virtud del nº 16, el sistema homogéneo (14) tiene una infinidad de soluciones diversas. De esto se deduce que el sistema dado (1) también tiene una infinidad de soluciones diversas; precisamente, por la igualdad (13), a cada solución u, v, w del sistema (14) corresponde una solución

$$\begin{array}{l} x=x_0+u, \\ y=y_0+v, \\ z=z_0+w \end{array}$$

del sistema (1). De este modo, nuestra afirmación queda demostrada.

Basándose en lo demostrado, inmediatamente obtenemos la proposición siguiente:

Si $\Delta=0$, *y si también* $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, *el sistema* (1), *o no tiene solución, o tiene una infinidad de soluciones* (en el último caso, al menos una de las ecuaciones del sistema es consecuencia de las otras; tal sistema se llama *indeterminado*).

Ejemplo 1. El sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1, \\ 2x+2y+2z=3, \\ 3x+3y+3z=4 \end{array}\right\}$$

(que satisface a las condiciones $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$, $\Delta_z=0$) no tiene solución.

En efecto, las dos primeras ecuaciones de este sistema son incompatibles, puesto que, multiplicando la primera de ellas por 2 y restando el resultado de la segunda, se llega a la igualdad $0=1$, que es imposible.

Ejemplo 2. El sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y-z=1, \\ 5x+2y+3z=2, \\ 8x+3y+2z=3 \end{array}\right\}$$

(que satisface a las condiciones $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$, $\Delta_z=0$) tiene una infinidad de soluciones. En efecto, la tercera ecuación de este sistema es consecuencia de las dos primeras, precisamente, se obtiene sumándolas miembro a miembro. Así pues, el sistema dado sólo tiene dos ecuaciones esenciales:

$$\left.\begin{aligned} 3x+y-z&=1, \\ 5x+2y+3z&=2. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Para hallar todas las soluciones simultáneas escribimos el sistema (*) de la forma

$$\left.\begin{aligned} 3x+y&=1+z, \\ 5x+2y&=2-3z \end{aligned}\right\}$$

y suponemos que a la incógnita z se le ha atribuido algún valor numérico. Aplicando las fórmulas (8) del nº 2, hallamos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ 2-3z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}=5z, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+z \\ 5 & 2-3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}=1-14z.$$

Los números x, y junto con el número z forman la solución del sistema; el sistema dado tiene una infinidad de soluciones diversas, puesto que el valor numérico de z se puede tomar arbitrariamente.

§ 6. Noción de determinante de orden cualquiera

18. En el problema general de resolución y discusión de un sistema de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas y en muchos otros problemas de cálculo matemático se suelen emplear los determinantes de orden n ($n=2, 3, 4, \ldots$). La teoría de los determinantes de orden cualquiera es, en términos generales, análoga a la teoría de los determinantes de tercer orden expuesta anteriormente; sin embargo, para exponerla con todo detalle se necesita una serie de proposiciones auxiliares y, por lo tanto, representa cierta dificultad. Esta teoría, así como la teoría de los sistemas de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas, se estudia en los cursos de álgebra superior.

Aquí nos limitaremos a dar las siguientes indicaciones:

1. Un determinante de orden n se determina por una tabla de números (elementos del determinante) que tiene n filas y n columnas; el determinante de orden n se denota igual que los determinantes de segundo y tercer orden.

2. Se llama menor de un elemento de un determinante de orden n, al determinante de orden $n-1$ que se obtiene del determinante dado, suprimiendo la fila y la columna en cuyas intersecciones está situado este elemento.

3. Se llama **complemento algebraico** de un elemento del determinante al menor de este elemento, tomado con su signo, si la suma de los índices de la fila y de la columna, en cuyas intersecciones está situado este elemento, es un número par, y con signo contrario, si este número es impar.

4. El determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una columna (o de alguna fila) por sus complementos

algebraicos. De este modo, el cálculo de un determinante de orden n se reduce al cálculo de n determinantes de orden $n-1$.

5. Todas las propiedades de los determinantes expuestas anteriormente se refieren a los determinantes de orden cualquiera.

Ejemplo. Calcular el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

Solución. Desarrollando este determinante por los elementos de la fila superior, o sea, representándolo en forma de una suma de productos de los elementos de la fila superior por sus complementos algebraicos, hallamos:

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 296$$

Nota. Se pueden simplificar los cálculos del determinante, si se aplica previamente la propiedad 8 (véase nº 10 y la nota al fin del nº 12).